

---

Cognome e nome ..... Firma .....

Corso di Laurea:   ◇ AUTL;   ◇ MATL;   ◇ MECL

---

**Istruzioni**

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni, in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello), firmare e segnare il proprio corso di laurea.**
  2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato dopo ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
  3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
  4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
  5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo.**
  6. TENERE il foglio B come promemoria delle risposte date.
  7. TEMPO a disposizione: 150 min.
- 

1. Sia data la seguente funzione  $f$  reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\log x + 2}\right)$$

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione  $f$ , in accordo con i risultati ottenuti.

Determinare il dominio di  $f$  ed eventuali simmetrie.

**Risposta [punti 1]:**

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per  $f$ .

**Risposta [punti 2]:**

Calcolare la funzione derivata prima di  $f$  e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

**Risposta [punti 1]:**

Studiare la crescita e decrescita di  $f$ , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per  $f$ : stabilire se  $f$  è limitata inferiormente/superiormente.

**Risposta [punti 2]:**

Calcolare la funzione derivata seconda di  $f$  e studiare la concavità e la convessità di  $f$ , calcolando gli eventuali punti di flesso per  $f$ .

**Risposta [punti 2]:**

---

2. Determinare  $\inf A$ ,  $\sup A$  ed eventualmente  $\min A$  e  $\max A$ , dove

$$A = \left\{ \left[ \frac{1}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right]^{(-1)^n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Risposta [punti 3]:**

---

3. Determinare il luogo geometrico degli  $z \in \mathbb{C}$  tali che sia soddisfatta la seguente relazione:

$$|z - (2 + i)|^2 + z \cdot \bar{z} - [\operatorname{Im}(3i + z)]^2 = \operatorname{Re} \left( \frac{2z + 1}{i} \right).$$

**Risposta [punti 4]:**

---

4. Calcolare le radici complesse della seguente equazione  $z^4 - i|1i - 1|^2 z = 0$ .

**Risposta [punti 3]:**

---

5. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right) \left[ n - \sqrt{n^2 + 7} \right]}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

**Risposta [punti 3]:**

---

6. Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; sia  $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\cos x|} & \text{se } x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \\ \alpha - 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}, \\ 3 & \text{se } x = \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Si discuta al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la continuità e la derivabilità di  $f$  in  $(0, 2\pi)$ .

**Risposta [punti 5]:**

---

7. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]^{\frac{2}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}} \log \left[ 3 \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} \right]$$

**Risposta [punti 4]:**

---

1. Sia data la seguente funzione  $f$  reale di variabile reale definita da:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\log x + 2}\right)$$

Tracciare sul foglio di protocollo un grafico qualitativo della funzione  $f$ , in accordo con i risultati ottenuti.

Determinare il dominio di  $f$  ed eventuali simmetrie.

**Risposta [punti 1]:**

Calcolare i limiti alla frontiera del dominio e determinare eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui) per  $f$ .

**Risposta [punti 2]:**

Calcolare la funzione derivata prima di  $f$  e determinarne il dominio, classificando eventuali punti di non derivabilità.

**Risposta [punti 1]:**

Studiare la crescita e decrescita di  $f$ , calcolando, qualora esistano, punti di massimo/minimo relativo e punti di massimo/minimo assoluto per  $f$ : stabilire se  $f$  è limitata inferiormente/superiormente.

**Risposta [punti 2]:**

Calcolare la funzione derivata seconda di  $f$  e studiare la concavità e la convessità di  $f$ , calcolando gli eventuali punti di flesso per  $f$ .

**Risposta [punti 2]:**

2. Determinare  $\inf A$ ,  $\sup A$  ed eventualmente  $\min A$  e  $\max A$ , dove

$$A = \left\{ \left[ \frac{1}{n+2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right]^{(-1)^n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Risposta [punti 3]:**

3. Determinare il luogo geometrico degli  $z \in \mathbb{C}$  tali che sia soddisfatta la seguente relazione:

$$|z - (2 + i)|^2 + z \cdot \bar{z} - [\operatorname{Im}(3i + z)]^2 = \operatorname{Re}\left(\frac{2z + 1}{i}\right).$$

**Risposta [punti 4]:**

4. Calcolare le radici complesse della seguente equazione  $z^4 - i|1 - i|^2 z = 0$ .

**Risposta [punti 3]:**

5. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right) [n - \sqrt{n^2 + 7}]}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

**Risposta [punti 3]:**

6. Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; sia  $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\cos x|} & \text{se } x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \\ \alpha - 1 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}, \\ 3 & \text{se } x = \frac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Si discuta al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la continuità e la derivabilità di  $f$  in  $(0, 2\pi)$ .

**Risposta [punti 5]:**

7. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right]^{\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} \log \left[ 3 \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} \right]$$

**Risposta [punti 4]:**