ANALISI MATEMATICA A - 26 novembre 2008 - C.d.L.: AUTL - MATL - MECL

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell'esercizio n° 1 ed è il terzo addendo nella f.

Fila 1

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

$\lim_{x \to \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \frac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,

$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \frac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero si ha un punto di flesso in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. La successione $a_n = 8\arctan\left[\frac{2n}{2n+1}\right]$ è monotona crescente, quindi per il teorema delle successioni monotone si ha $\inf A = \min A = 0$, $\nexists \max A$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 2\pi$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{2}\, i$.

5. $\ell = -2$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 7$, $\ell = 2$ se $\alpha = 7$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 7$.

7. f è discontinua in $x = 7$ ed in $x = 0$. Il punto $x = 7$ è un punto di infinito; il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminiabile.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. I punti $x = 0$ e $x = 2$ sono entrambi punti di flesso a tangente verticale.

Fila 2

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

$\lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,
$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero si ha un punto di flesso in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. La successione $a_n = 12\arctan\left[\dfrac{3n}{3n+1}\right]$ è monotona crescente, quindi per il teorema delle successioni monotone si ha $\inf A = \min A = 0$, $\nexists \max A$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 3\pi$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{3}\,i$.

5. $\ell = -3$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 6$, $\ell = 3$ se $\alpha = 6$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 6$.

7. f è discontinua in $x = 6$ ed in $x = 0$. Il punto $x = 6$ è un punto di infinito; il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminiabile.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. I punti $x = 0$ e $x = 3$ sono entrambi punti di flesso a tangente verticale.

Fila 3

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

$\lim_{x \to \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,

$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero si ha un punto di flesso in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. La successione $a_n = 16 \arctan\left[\dfrac{4n}{4n+1}\right]$ è monotona crescente, quindi per il teorema delle successioni monotone si ha $\inf A = \min A = 0$, $\nexists \max A$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 4\pi$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{4}\, i$.

5. $\ell = -4$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 5$, $\ell = 4$ se $\alpha = 5$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 5$.

7. f è discontinua in $x = 5$ ed in $x = 0$. Il punto $x = 5$ è un punto di infinito; il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminiabile.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$. I punti $x = 0$ e $x = 4$ sono entrambi punti di flesso a tangente verticale.

Fila 4

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

$\lim_{x \to \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,
$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero si ha un punto di flesso in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. La successione $a_n = 20 \arctan\left[\dfrac{5n}{5n+1}\right]$ è monotona crescente, quindi per il teorema delle successioni monotone si ha $\inf A = \min A = 0$, $\nexists \max A$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 5\pi$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{5}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{5}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{5}\, i$.

5. $\ell = -5$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 4$, $\ell = 5$ se $\alpha = 4$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 4$.

7. f è discontinua in $x = 4$ ed in $x = 0$. Il punto $x = 4$ è un punto di infinito; il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminiabile.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$. I punti $x = 0$ e $x = 5$ sono entrambi punti di flesso a tangente verticale.

Fila 5

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

$\lim_{x \to \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,

$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero si ha un punto di flesso in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. La successione $a_n = 24 \arctan\left[\dfrac{6n}{6n+1}\right]$ è monotona crescente, quindi per il teorema delle successioni monotone si ha $\inf A = \min A = 0$, $\nexists \max A$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 6\pi$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{6}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{6}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{6}\, i$.

5. $\ell = -6$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 3$, $\ell = 6$ se $\alpha = 3$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 3$.

7. f è discontinua in $x = 3$ ed in $x = 0$. Il punto $x = 3$ è un punto di infinito; il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminiabile.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 6\}$. I punti $x = 0$ e $x = 6$ sono entrambi punti di flesso a tangente verticale.

Fila 6

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

$\lim_{x \to \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,

$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero si ha un punto di flesso in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. La successione $a_n = 28 \arctan\left[\dfrac{7n}{7n+1}\right]$ è monotona crescente, quindi per il teorema delle successioni monotone si ha $\inf A = \min A = 0$, $\nexists \max A$, $\sup A = \lim_{n\to\infty} a_n = 7\pi$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{7}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{7}\, i$.

5. $\ell = -7$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 2$, $\ell = 7$ se $\alpha = 2$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 2$.

7. f è discontinua in $x = 2$ ed in $x = 0$. Il punto $x = 2$ è un punto di infinito; il punto $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminiabile.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 7\}$. I punti $x = 0$ e $x = 7$ sono entrambi punti di flesso a tangente verticale.