ANALISI MATEMATICA A - 13 giugno 2011 - C.d.L.: AUTL - MATL - MECL

Il NUMERO della FILA è contenuto nel testo dell'esercizio n° 1 ed è il terzo addendo nella f.

Fila 1

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

$\lim_{x \to \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,

$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero si ha un punto di flesso in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. $\sup A = 9e$, $\inf A = 7e$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{2}\, i$.

5. $\ell = -2$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 7$, $\ell = 2$ se $\alpha = 7$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 7$.

7. f continua in $\mathbb{R} \setminus \{8\}$; $x = 8$ punto di infinito.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$; $x = 1$ punto angoloso e $x = 2$ punto di cuspide.

Fila 2

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

$\lim_{x \to \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,

$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero si ha un punto di flesso in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. $\sup A = 8e$, $\inf A = 6e$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{3}\, i$.

5. $\ell = -3$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 6$, $\ell = 3$ se $\alpha = 6$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 6$.

7. f continua in $\mathbb{R} \setminus \{7\}$; $x = 7$ punto di infinito.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$; $x = 2$ punto angoloso e $x = 3$ punto di cuspide.

Fila 3

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

$\lim_{x \to \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,

$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero si ha un punto di flesso in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. $\sup A = 7e$, $\inf A = 5e$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{4}\, i$.

5. $\ell = -4$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 5$, $\ell = 4$ se $\alpha = 5$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 5$.

7. f continua in $\mathbb{R} \setminus \{6\}$; $x = 6$ punto di infinito.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$; $x = 3$ punto angoloso e $x = 4$ punto di cuspide.

Fila 4

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

$\lim_{x \to \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,

$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero si ha un punto di flesso in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. $\sup A = 6e$, $\inf A = 4e$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{5}\, i$.

5. $\ell = -5$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 4$, $\ell = 5$ se $\alpha = 4$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 4$.

7. f continua in $\mathbb{R} \setminus \{5\}$; $x = 5$ punto di infinito.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{4, 5\}$; $x = 4$ punto angoloso e $x = 5$ punto di cuspide.

Fila 5

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

$\lim_{x \to \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,

$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero si ha un punto di flesso in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. $\sup A = 5e$, $\inf A = 3e$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{6}\, i$.

5. $\ell = -6$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 3$, $\ell = 6$ se $\alpha = 3$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 3$.

7. f continua in $\mathbb{R} \setminus \{4\}$; $x = 4$ punto di infinito.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{5, 6\}$; $x = 5$ punto angoloso e $x = 6$ punto di cuspide.

Fila 6

1. (a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(b) Poiché f è periodica di periodo 2π, ci limitiamo allo studio di f su $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.

$\lim_{x \to \left(\frac{3}{2}\pi\right)^{\pm}} f(x) = +\infty$. $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoto verticale completo. Vista la periodicità della funzione non ci sono asintoti orizzontali ed asintoti obliqui.

(c) $f'(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4\sqrt{(\sin(x)+1)^3}}$; $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$.

(d) f strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; f strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,

$x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo e di minimo assoluto, $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo. Non esistono punti di massimo assoluto in quanto f è illimitata superiormente.

(e) $f''(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2\sqrt{(\sin(x)+1)^3}} - \dfrac{3\cos(x)\sin(2x)}{8\sqrt{(\sin(x)+1)^5}}$. Poiché $x = 0$ è punto di minimo relativo in cui f è derivabile si ha $f''(0) > 0$, analogamente, poiché $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di massimo relativo in cui f è derivabile, si ha $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, quindi poiché f è derivabile su tutto il dominio, allora f'' cambia segno nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero si ha un punto di flesso in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ragionando analogamente si ha un altro punto di flesso nell'intervallo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

2. $\sup A = 4e$, $\inf A = 2e$, $\nexists \min A$, $\nexists \max A$.

3. Il luogo geometrico cercato è la retta $x + 2y = 0$

4. $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt[3]{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_5 = \sqrt[3]{7}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_6 = -\sqrt[3]{7}\, i$.

5. $\ell = -7$.

6. $\ell = 0$ se $\alpha < 2$, $\ell = 7$ se $\alpha = 2$, $\ell = +\infty$ se $\alpha > 2$.

7. f continua in $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; $x = 3$ punto di infinito.

8. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{6, 7\}$; $x = 6$ punto angoloso e $x = 7$ punto di cuspide.