Probabilità e Statistica - 25.11.2009

Cognome e Nome ....

C. d. L.: GESL   Anno di Corso: 1 2 3 altro

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta. In particolare, per gli esercizi (E1) ed (E2), SCRIVERE **anche** il procedimento applicato per rispondere ai quesiti posti.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questi fogli e tutti i fogli di protocollo**.
6. TEMPO a disposizione: 150 min.

Quesito	C1	C2	C3	C4	QT	E1	E2	TOT
Punti								

(C1) Sapendo che la probabilità che si verifichi a Milano almeno un terremoto in un anno è pari a $\frac{1}{6}$, si determini il numero medio di terremoti in un anno.

[punti 4]

C1 (scrivere il risultato con cinque decimali)

(C2) Sia X una variabile casuale distribuita normalmente con media 48 e varianza 36. Calcolare a in modo tale che $P[|X - 48| \geq a] = 0,05$.

[punti 4]

C2 (scrivere il risultato con due decimali)

(C3) Una fabbrica realizza componenti elettronici che escono da due linee di produzione A e B, rispettivamente, con probabilità 0.2 e 0.8 . La linea A ha una percentuale di pezzi difettosi del 8%, mentre B del 6%. Scegliendo un pezzo a caso e trovandolo difettoso, qual è la probabilità che provenga dalla linea A?

[punti 4]

C3

(C4) Data la funzione

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x < a, \\ a & \text{se } a \le x < 16a, \\ 17a - x & \text{se } 16a \le x < 17a, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

determinare il valore del parametro $a \in \mathbb{R}^+$ affinché $f_X(x)$ sia una funzione di densità di probabilità. [PUNTI 4]

C4 (scrivere il risultato in frazione ridotta ai minimi termini)

Quesito Teorico

Sia X una variabile aleatoria simmetrica rispetto al suo valore atteso μ_X ed avente varianza σ_X^2. Dimostrare che

$$E[X^3] = 3\,\mu_X\,\sigma_X^2 + (E[X])^3.$$

[PUNTI 2]

(E1) Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $\{0,1\}$ e Y una variabile aleatoria che assume i valori $\{1,3\}$. Sapendo che

$$P[Y=1]=\frac{2}{5}$$

$$P[X=0|Y=1]=P[Y=1|X=0]=\frac{1}{3},$$

calcolare la densità congiunta di (X,Y) e $\mathrm{cov}[X,Y]$.

[PUNTI 7]

(E2) Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale, di dimensione n, estratto da una distribuzione rettangolare uniforme sull'intervallo $[a, 2a]$.

(a) Determinare uno stimatore T_1 di a con il metodo dei momenti. Verificare se lo stimatore T_1 è distorto e calcolarne l'errore quadratico medio $MSE[T_1]$.

(b) Considerato poi lo stimatore $T_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{6}X_2$, verificare se T_2 è distorto e calcolarne l'errore quadratico medio $MSE[T_2]$.

(c) Supposto $n = 3$, quale dei due stimatori T_1 e T_2 di a è preferibile (giustificare la risposta)?

[PUNTI 7]