Probabilità e Statistica - 10.01.2012

Cognome e Nome ....

C. d. L.: GESL Anno di Corso: 1 2 3 altro

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta. In particolare, per gli esercizi (E1) ed (E2), SCRIVERE **anche** il procedimento applicato per rispondere ai quesiti posti.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questi fogli e tutti i fogli di protocollo**.
6. TEMPO a disposizione: 150 min.

Quesito	C1	C2	C3	C4	QT	E1	E2	TOT
Punti								

(C1) Siano X una variabile aleatoria normale, di media 10 e varianza 6,25, ed Y una variabile aleatoria normale, di media 7 e deviazione standard 4, indipendente da X. Calcolare $P[(X > 8) \vee (|Y - 2| < 6)]$.

[punti 4]

C1 (scrivere il risultato con cinque cifre decimali)

(C2) Sia X la variabile aleatoria che conteggia il numero di risposte esatte in una prova di accertamento del profitto costituita da 48 quesiti. Supponendo che la probabilità di rispondere esattamente ad un quesito sia valutata pari a $\frac{1+\theta}{4}$ con $\theta \in (0,3)$, determinare uno stimatore di θ con il metodo dei momenti.

[punti 4]

C2

(C3) Sapendo che la probabilità che si verifichi almeno un terremoto in un anno a Cremona è pari a $\frac{2}{15}$, determinare il numero medio di terremoti in un anno.

[punti 4]

C3 (scrivere il risultato con cinque cifre decimali)

(C4) Sia (X, Y) la variabile aleatoria bidimensionale e sia $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{4x^3} & \text{se} \quad x > 1 \quad \text{e} \quad 0 < y < a, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con $a > 0$.

(a) Determinare a affinché $f_{X,Y}$ sia una funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria bidimensionale (X, Y).

(b) Determinare la funzione di ripartizione $F_{X,Y}(x, y)$.

[PUNTI 4]

C4

Quesito Teorico

Date due variabili aleatorie X, Y identicamente distribuite, dimostrare che

$$\text{Cov}[2X + 2Y, 2X - 2Y] = 0.$$

[PUNTI 2]

(E1) Siano U_1 e U_2 due urne contenenti palline bianche e nere. U_1 contiene 3 palline bianche e 1 nera, U_2 contiene 1 pallina bianca e 4 nere.

(a) Si estraggono 1 pallina da U_1 e 1 da U_2 e si rimettono nelle rispettive urne. Calcolare la probabilità che le 2 palline estratte siano dello stesso colore.

(b) Ripetendo più volte l'esperimento del punto (a), calcolare la probabilità di ottenere 2 palline dello stesso colore al terzo tentativo.

(c) Si estrae una pallina da U_1 e la si pone in U_2. Successivamente si estrae una pallina da U_2. Qual è la probabilità che la pallina estratta da U_2 sia bianca? Qual è la probabilità che la pallina estratta da U_1 sia bianca, sapendo che la pallina estratta da U_2 è bianca?

[PUNTI 7]

(E2) Il tempo di vita (in ore) di una data apparecchiatura elettronica è una variabile casuale X avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{x^2} & \text{se } x > a, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

(a) Determinare a in modo che f_X sia una funzione di densità di probabilità.

(b) Determinare la funzione di ripartizione F_X.

(c) Calcolare $P[X > 3a]$.

(d) Calcolare $\text{Med}[X]$.

(e) Qual è la probabilità che su 4 apparecchiature di questo tipo almeno 3 funzionino per almeno 12 ore?

[PUNTI 7]