

COGNOME E NOME ..... N. MATRICOLA .....

C.D.L.:  AMBQ  CIVQ  EDIQQ  MATQ  MECQ ANNO DI CORSO:  2  3  ALTRO

ESERCIZIO. In un piano verticale  $Oxy$ , si consideri un sistema materiale pesante costituito da un'asta omogenea  $AB$ , di massa  $m$  e lunghezza  $4R$ , incernierata in  $O$  in modo che si abbia  $\overline{OA} = R$  e  $\overline{OB} = 3R$ , e da un disco omogeneo  $\mathcal{D}$ , di centro  $D$  massa  $m$  e raggio  $R$ , avente un punto del suo bordo incernierato nell'estremo  $B$  dell'asta  $AB$ . Si introducano i due parametri lagrangiani  $\theta = y^+ \hat{O}B$  e  $\varphi = y^+ \hat{B}D$ , dove  $y^+$  è la retta orientata passante per  $B$  e parallela all'asse  $y$ . Oltre alle forze peso, sul sistema agisce una molla ideale, di costante elastica  $h = \frac{mg}{R}$ , che collega il punto  $E$  del disco diametralmente opposto a  $B$  all'origine del sistema di riferimento.

Inoltre, sul disco  $\mathcal{D}$  agisce la coppia di momento  $\vec{M}_D = -mgR \sin \varphi \vec{k}$ , mentre sull'asta  $AB$  agisce la coppia di momento  $\vec{M}_{AB} = -\lambda mgR \vec{k}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Supposti i vincoli lisci, si chiede:

1. scrivere l'espressione della funzione potenziale delle due coppie (punti 2);
2. scrivere l'espressione della funzione potenziale della forza elastica (punti 1);
3. scrivere l'espressione della funzione potenziale di tutte le forze attive agenti sul sistema (asta + disco) (punti 2);
4. determinare le configurazioni di equilibrio del sistema (asta + disco) in funzione del parametro  $\lambda$  (punti 2);
5. studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio del sistema (asta + disco) in funzione del parametro  $\lambda$  (punti 3);
6. calcolare le reazioni vincolari esterne ed interne all'equilibrio (punti 4);
7. scrivere l'espressione dell'energia cinetica del sistema (asta + disco) (punti 3);
8. scrivere la funzione di Lagrange e determinare le equazioni differenziali del moto del sistema (asta + disco) (punti 3);
9. posto,  $\lambda = 2\sqrt{3}$ , calcolare le pulsazioni fondamentali delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile (punti 1);
10. determinare gli eventuali integrali primi di moto (punti 1).

