Meccanica Razionale - 15.01.2019

COGNOME E NOME ....

C. D. L.: .... ANNO DI CORSO: [2] [3] [ALTRO]

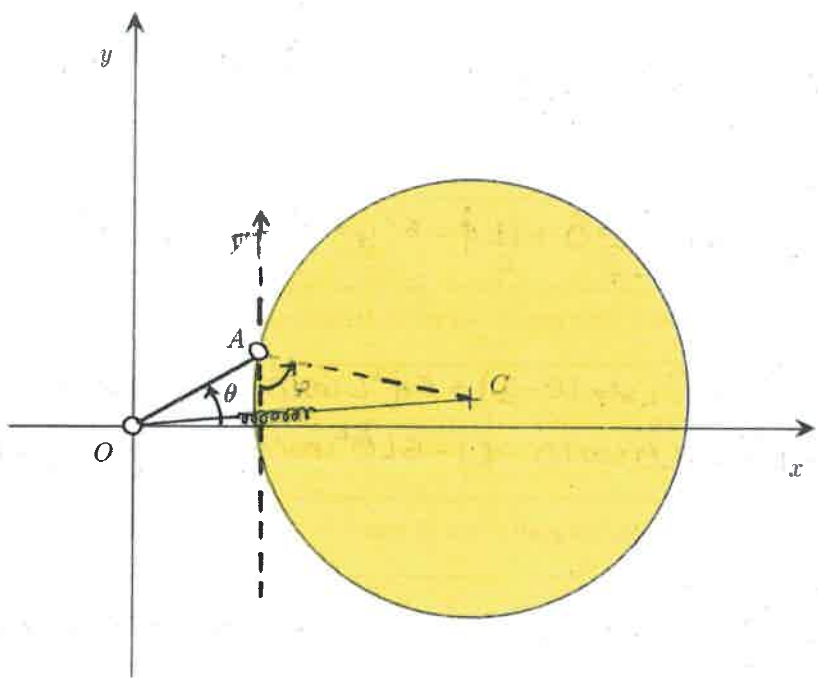
MATRICOLA .... FIRMA ....

ISTRUZIONI

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questo foglio e tutti i fogli di protocollo.**
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

Quesito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOT
Punti										

In un piano verticale Oxy, si consideri un sistema materiale pesante costituito da un'asta omogenea OA, di massa m e lunghezza $2L$, e da un disco omogeneo, di massa m e raggio $3L$. L'asta ha l'estremo O incernierato nell'origine del riferimento e l'estremo A incernierato in un punto del bordo del disco. Oltre alle forze peso, una molla di costante elastica $k = \frac{mg}{\alpha L}$ $(\alpha > 0)$, collega il centro C del disco con l'estremo O dell'asta. Si introducano i due parametri lagrangiani $\theta = x^{+}\hat{O}A$ e $\varphi = y'^{-}\hat{A}C$, dove y' è la retta orientata passante per A e parallela all'asse y. Supposti i vincoli lisci, si chiede:



1. determinare la funzione potenziale U di tutte le forze attive agenti sul sistema [PUNTI 5]

$$\mathcal{U} = 3mgL\left(\cos\varphi - \sin\theta + \frac{2}{\alpha}\sin(\theta-\varphi)\right) + cost.$$

2. determinare le configurazioni di equilibrio del sistema al variare del parametro α [PUNTI 5]

(θ_e, φ_e): $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\frac{3}{2}\pi, \pi\right)$; $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$; $\left(\pi/2, \pi\right)$ $\forall \alpha > 0$

se $0 < \alpha \leq 4$ $\left(\frac{3}{2}\pi - \arccos\left(\frac{\alpha}{4}\right), \arccos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right)$; $\left(\arccos\left(\frac{\alpha}{4}\right) - \frac{\pi}{2}, 2\pi - \arccos\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right)$

3. determinare la reazione vincolare esterna all'equilibrio, nel caso $\alpha = 8$ [PUNTI 3]

$$\vec{\Phi}^e_O(0; 2mg)$$

4. determinare la reazione vincolare interna all'equilibrio, nel caso $\alpha = 8$ [PUNTI 3]

in $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$: $\vec{\Phi}^e_A = (0, 7mg/8)$; in $\left(3/2\pi, 0\right)$: $\vec{\Phi}^e_A = (0, 3/8\, mg)$

in $\left(3\pi/2, \pi\right)$: $\vec{\Phi}^e_A = (0, 5mg/8)$; in $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$: $\vec{\Phi}^e_A = \left(0, \frac{13}{8}mg\right)$

5. scrivere l'energia cinetica del sistema [PUNTI 4]

$$T = \frac{1}{2}mL^2\left[\frac{16}{3}\dot\theta^2 + \frac{27}{2}\dot\varphi^2 - 12\dot\varphi\dot\theta\sin(\theta-\varphi)\right]$$

6. calcolare l'espressione della quantità di moto del sistema [PUNTI 3]

$$\vec{Q} = m\left(3L\dot\varphi\cos\varphi - 3L\dot\theta\sin\theta,\ 3L\dot\varphi\sin\varphi + 3L\dot\theta\cos\theta\right)$$

7. calcolare il momento della quantità di moto del sistema rispetto al polo O [PUNTI 4]

$$\vec{K}_O = mL^2\left[\frac{16}{3}\dot\theta + \frac{27}{2}\dot\varphi - 6(\dot\varphi+\dot\theta)\sin(\theta-\varphi)\right]\vec{k}$$

8. scrivere le equazioni differenziali del moto del sistema [PUNTI 3]

$$\frac{16}{3}L\ddot\theta - 6\ddot\varphi L\sin(\theta-\varphi) + 6\dot\varphi^2 L\cos(\theta-\varphi) + 3g\cos\theta - \frac{6g}{\alpha}\cos(\theta-\varphi) = 0$$

$$\frac{27}{2}L\ddot\varphi - 6L\ddot\theta\sin(\theta-\varphi) - 6L\dot\theta^2\cos(\theta-\varphi) + 3g\sin\varphi + \frac{6g}{\alpha}\cos(\theta-\varphi) = 0$$

9. determinare eventuali integrali primi di moto [PUNTI 2]

$$T + V = E$$

$$\frac{1}{2}mL^2\left[\frac{16}{3}\dot\theta^2 + \frac{27}{2}\dot\varphi^2 - 12\dot\varphi\dot\theta\sin(\theta-\varphi)\right] - 3mgL\left(\cos\varphi - \sin\theta + \frac{2}{\alpha}\sin(\theta-\varphi)\right) = E$$