Probabilità e Statistica - 31.03.2010

Cognome e Nome ....

C. d. L.: GESL   Anno di Corso: 1 2 3 altro

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta. In particolare, per gli esercizi (E1) ed (E2), SCRIVERE **anche** il procedimento applicato per rispondere ai quesiti posti.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questi fogli e tutti i fogli di protocollo**.
6. TEMPO a disposizione: 150 min.

Quesito	C1	C2	C3	C4	QT	E1	E2	TOT
Punti								

(C1) Sia X una v.a. che rappresenti il tempo di vita (espresso in ore) di una apparecchiatura elettronica e sia f_X la funzione di densità di probabilità di X

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 15, \\ \dfrac{15}{x^2} & \text{se } x > 15. \end{cases}$$

Determinare la probabilità che, in 6 apparecchiature di questo tipo, 2 funzionino per almeno 20 ore.

[punti 4]

C1 (scrivere il risultato con cinque decimali)

(C2) Sia X una variabile aleatoria normale di media μ e varianza 16. Determinare μ sapendo che

$$P[X < 32] = 0.69146 .$$

[punti 4]

C2

(C3) Siano U_1 ed U_2 due urne contenenti palline. Supponiamo che

- U_1 contenga il 60% di palline bianche;
- U_2 contenga il 70% di palline bianche;
- U_1 contenga il doppio di palline di U_2.

Poniamo ora tutte le palline delle due urne U_1 e U_2 in una sola urna U ed estraiamo una pallina. Sapendo che la pallina è bianca, qual è la probabilità che inizialmente appartenesse all'urna U_1.

[punti 4]

C3 (scrivere il risultato in frazione)

(C4) Il tempo di vita medio di un macchinario è distribuito esponenzialmente, con media pari a 400 ore. Calcolare la probabilità che il macchinario funzioni per almeno altre 100 ore, sapendo che ha lavorato correttamente per le prime 500 ore.

[PUNTI 4]

C4 (scrivere il risultato con cinque decimali)

Quesito Teorico

Date due variabili aleatorie indipendenti X e Y, dimostrare che

$$\mathrm{cov}[X - 2Y, X + 3] = \mathrm{var}[X].$$

[PUNTI 2]

(E1) Da una popolazione normale X con varianza 9 e media μ incognita, è stato estratto un campione casuale di ampiezza $n = 10$, ottenendo i seguenti risultati

$$\begin{array}{lllll} x_1 = 12, & x_2 = 8.2, & x_3 = 7.3, & x_4 = 9.8, & x_5 = 5.1 \\ x_6 = 5.6, & x_7 = 9, & x_8 = 6.8, & x_9 = 10.2, & x_{10} = 11. \end{array}$$

(a) Calcolare la stima di μ e fornire il valore della varianza del corrispondente stimatore.

(b) Determinare un intervallo di confidenza al 97% per la media μ.

[PUNTI 7]

(E2) Sia (X, Y) la variabile aleatoria bidimensionale avente densità di probabilità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{xy}} & 0 < x < 4 \text{ e } x < y < 4, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si chiede:

(a) determinare la costante $k \in \mathbb{R}$ di normalizzazione;

(b) determinare la densità marginale di Y ;

(c) determinare la densità marginale di X ;

(d) determinare $F_X(x)$;

(e) determinare $f_{Y|X}(y|x)$ per $0 < x < 4$;

(f) calcolare $E\left[Y|X = \dfrac{1}{4}\right]$.

[PUNTI 7]