

PROBABILITÀ E STATISTICA - 27.06.2011

COGNOME E NOME .....

C. D. L.:

ANNO DI CORSO:

MATRICOLA ..... FIRMA .....

ISTRUZIONI

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta. In particolare, per gli esercizi (E1) ed (E2), SCRIVERE **anche** il procedimento applicato per rispondere ai quesiti posti.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questi fogli e tutti i fogli di protocollo.**
6. TEMPO a disposizione: 150 min.

| Quesito | C1 | C2 | C3 | C4 | QT | E1 | E2 | TOT |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| Punti   |    |    |    |    |    |    |    |     |

(C1) Calcolare media  $\mu_X$  e deviazione standard  $\sigma_X$  di una variabile aleatoria  $X$  normale tale che

$$P[X < 37.5] = 0.69146 \quad \text{e} \quad P[X > 40] = 0.15866.$$

[PUNTI 4]

|    |
|----|
| C1 |
|----|

(C2) Sia  $X_1, \dots, X_n$  un campione casuale di ampiezza  $n$  estratto da una popolazione distribuita con densità di probabilità

$$f_X(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

con  $\theta > 0$ . Applicando il metodo di massima verosimiglianza determinare uno stimatore per  $\theta$ .

[PUNTI 4]

|    |
|----|
| C2 |
|----|

(C3) Sia  $(X, Y)$  la variabile aleatoria bidimensionale avente densità di probabilità congiunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{k}{7} xy & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Dopo aver determinato la costante  $k \in \mathbb{R}$  di normalizzazione, calcolare la funzione di densità marginale  $f_Y(y)$ .

[PUNTI 4]

|    |
|----|
| C3 |
|----|

(C4) Da una ricerca su una data popolazione emerge che la probabilità che una persona abbia la pressione alta è 6%. Risulta inoltre che la probabilità che una persona con pressione alta beva alcolici è 12%, mentre la probabilità che una persona con pressione non alta beva alcolici è 8%. Calcolare la probabilità che una persona abbia la pressione alta, sapendo che assume alcolici.

[PUNTI 4]

C4 (scrivere il risultato in frazione ridotta ai minimi termini)

**Quesito Teorico**

Enunciare e dimostrare la Disuguaglianza di Čebyšëv.

[PUNTI 2]

(E1) Sia  $X$  una variabile casuale avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{6} & \text{se } 1 < x \leq 6, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

- (a) Determinare la funzione di ripartizione  $F_X$ .
- (b) Calcolare  $\text{var}[X]$ .
- (c) Calcolare  $P\left[\frac{1}{2} \leq X \leq 10\right]$ .
- (d) Sia  $Y$  una variabile casuale continua distribuita uniformemente sull'intervallo  $[-1, 1]$ . Sapendo che  $X$  e  $Y$  sono indipendenti, calcolare  $E[(X + Y)^2]$ .

[PUNTI 7]



(E2) Sia  $X_1, \dots, X_6$  un campione casuale di ampiezza 6, estratto da una popolazione distribuita con la densità di probabilità

$$f_X(x, \theta) = \begin{cases} 3\theta x + 1 - \frac{3\theta}{2} & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

con  $0 < \theta < \frac{2}{3}$ .

- (a) Determinare uno stimatore  $T_1$  di  $\theta$  con il metodo dei momenti.
- (b) Verificare se lo stimatore  $T_1$  è non distorto.
- (c) Si consideri lo stimatore  $T_2 = 2(X_1 + X_2 - 1)$ . Indicare quale dei due stimatori  $T_1$  e  $T_2$  sia preferibile, motivando la risposta.

[PUNTI 7]

