# Probabilità e Statistica - 07.09.2011

Cognome e Nome ..........................................................................

C. d. L.: GESL  Anno di Corso: 1 2 3 altro

Matricola .................................... Firma .......................................

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta. In particolare, per gli esercizi (E1) ed (E2), SCRIVERE **anche** il procedimento applicato per rispondere ai quesiti posti.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questi fogli e tutti i fogli di protocollo**.
6. TEMPO a disposizione: 150 min.

| Quesito | C1 | C2 | C3 | C4 | QT | E1 | E2 | TOT |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punti | | | | | | | | |

(C1) Un tribunale dichiara un imputato colpevole nel 90% dei casi ed innocente nell'1% dei casi. L'80% degli imputati nel tribunale è colpevole, il restante 20% innocente. Calcolare la probabilità che un imputato preso a caso venga assolto.

[punti 4]

C1 (scrivere il risultato con tre cifre decimali)

(C2) Una fabbrica produce confezioni di detersivo il cui contenuto (espresso in g) è una variabile aleatoria normale $X$ di media 500g. Calcolare $\mathrm{var}[X]$ sapendo che

$$P[X > 490] = 0.97725\,.$$

[punti 4]

C2

(C3) Si consideri la funzione di densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = k(x+1)y\; I_{[0,2]}(x)\; I_{[0,2]}(y)\,.$$

Dopo aver determinato la costante $k$ di normalizzazione, scrivere la funzione $f_{X|Y}(x|y)$ per $0 < y < 2$.

[punti 4]

C3

(C4) Sia $X_1, ..., X_n$ un campione casuale di ampiezza $n$ estratto da una popolazione distribuita con densità di probabilità

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\lambda^2}\,(2\lambda - x) & \text{se } 0 \leq x \leq 2\lambda, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Applicando il metodo dei momenti, determinare uno stimatore di $\lambda$ e verificare se esso è distorto.

[PUNTI 4]

| C4 |
|---|
| |

**Quesito Teorico**

Si consideri un campione aleatorio $X_1, \dots X_n$ estratto da una popolazione di media $\mu$ e varianza $\sigma^2$. Indicata con $S^2$ la varianza campionaria, si dimostri che

$$E[S^2] = \sigma^2.$$

[PUNTI 2]

(E1) La temperatura di un locale è modellabile con una variabile casuale normale di media e varianza sconosciute. In una settimana sono state rilevate le seguenti temperature

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 23.6°C | 23.2°C | 23.5°C | 23.4°C | 22.9°C | 24.0°C | 23.2°C |

Determinare

(a) l'intervallo di confidenza per la media al 95%;

(b) l'intervallo di confidenza per la varianza al 99%.

[PUNTI 7]

(E2) Data la densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{se } -3 \le x \le 3, \\ \dfrac{1}{3} & \text{se } 3 < x \le 4, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

determinare

(a) la costante di normalizzazione $k$;

(b) la funzione di ripartizione $F_X$;

(c) $P[X > 3 | X^2 > 1]$;

(d) il valore di $c$ che soddisfa $P[X < c] = \dfrac{1}{27}$.

[PUNTI 7]