

PROBABILITÀ E STATISTICA - 14.01.2014

COGNOME E NOME

C. D. L.:

ANNO DI CORSO:

MATRICOLA FIRMA

ISTRUZIONI

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta. In particolare, per gli esercizi (E1) ed (E2), SCRIVERE **anche** il procedimento applicato per rispondere ai quesiti posti.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questi fogli e tutti i fogli di protocollo.**
6. TEMPO a disposizione: 150 min.

Quesito	C1	C2	C3	C4	QT	E1	E2	TOT
Punti								

(C1) Paolo e Pietro giocano a carte con un mazzo di carte francesi (52 carte divise in 4 semi - Cuori, Quadri, Fiori, Picche - di 13 carte ciascuno). Paolo pesca 5 carte (senza reinserimento). Calcolare la probabilità che siano tutte dello stesso seme.

[PUNTI 4]

C1 (scrivere il risultato in frazione ridotta ai minimi termini)

(C2) Si consideri un campione aleatorio X_1, \dots, X_n da una distribuzione bernoulliana di parametro ϑ . Calcolare la probabilità che almeno una variabile aleatoria $X_i, i = 1, \dots, n$ assuma il valore 1.

[PUNTI 4]

C2

(C3) Si consideri una sequenza di 4 lanci di una moneta truccata in modo che la probabilità che esca testa in un lancio sia $\frac{1}{3}$. Calcolare la probabilità che la sequenza contenga esattamente 3 teste.

[PUNTI 4]

C3 (scrivere il risultato con sei cifre decimali)

- (C4) Una nuova procedura di temperamento dell'acciaio è utilizzata per la produzione di barre d'acciaio. Normalmente, con il vecchio sistema, le barre prodotte avevano un carico di rottura medio $\mu_0 = 9.807 \cdot 10^3 N$. Si prendano a caso $n = 100$ barre ottenute mediante il nuovo sistema di lavorazione e le si sottopongano a test per determinare il carico di rottura, ottenendo i carichi di rottura X_1, \dots, X_{100} . Sia $\bar{X}_{100} = 9.786 \cdot 10^3 N$ la media campionaria e supponiamo che la deviazione standard del carico di rottura sia nota da studi teorici e pari a $\sigma_0 = 10^3 N$. Determinare un'intervallo di confidenza al 95% per la media μ del carico medio di rottura delle barre ottenute con la nuova procedura.

[PUNTI 4]

C4

Quesito Teorico

Siano dati (Ω, \mathcal{A}, P) uno spazio di probabilità e X una v.a. con varianza $\text{var}[X]$. Supponendo che tutte le quantità indicate esistano, verificare che

$$\text{var}[X^2] = E[X^4] - (E[X])^4 - 2(E[X])^2 \text{var}[X] - (\text{var}[X])^2.$$

[PUNTI 2]

- (E1) Si consideri la variabile aleatoria discreta X che assume i valori $-1, 0, 1$ con probabilità, rispettivamente $\vartheta^2, (1-\vartheta)^2$ e $2(1-\vartheta)\vartheta$, con $0 \leq \vartheta \leq 1$. Supponiamo che sia disponibile il campione $(1, -1, 1)$. Determinare
- (a) una stima $\tilde{\vartheta}$ di ϑ utilizzando il metodo dei momenti;
 - (b) una stima $\tilde{\vartheta}$ di ϑ utilizzando il metodo di massima verosimiglianza.

[PUNTI 7]

(E2) Supponiamo di avere 2 urne. La prima urna contiene 2 biglie bianche ed 1 biglia nera, la seconda 2 biglie nere ed 1 bianca. Prendiamo a caso una biglia dalla prima urna ed una dalla seconda e cambiamole di urna. Siano X_1 ed X_2 il numero di biglie nere nella prima e nella seconda urna dopo questa operazione. Determinare

- (a) la densità congiunta di (X_1, X_2) ;
- (b) $f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$;
- (c) $E(X_1|X_2 = x_2)$;
- (d) il coefficiente di correlazione tra X_1 e X_2 .

[PUNTI 7]

