Probabilità e Statistica - 04.09.2019

Cognome e Nome ....

C. d. L.: .... Anno di Corso: 1 2 3 altro

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questi fogli e tutti i fogli protocollo**.
6. TEMPO a disposizione: 120 min.

Quesito	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11	TOT
Punti												

(Q1) La durata in ore di un certo tipo di lampadine X si distribuisce secondo una legge incognita con deviazione standard $\sigma_X = 8$. Supponendo di estrarre un campione casuale di 36 lampadine e sapendo che $P[\overline{X} \leq 1400] = 0.9332$, calcolare μ_X.

[punti 3]

Q1

(Q2) Siano dati $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e X una v.a. con varianza $\mathrm{var}[X]$. Supponendo che tutte le quantità indicate esistano, verificare che $\mathrm{var}[C + X] = \mathrm{var}[X]$, con $C \in \mathbb{R}$.

[punti 3]

Q2

(Q3) Si consideri un campione aleatorio $X_1, \ldots, X_{10}$ di 10 elementi estratto da una popolazione X di media incognita μ e varianza 5. Introdotti i seguenti stimatori del parametro μ

$$T_1 = \frac{X_1 + X_3 + X_5}{3}, \quad T_2 = \frac{X_1 + 2X_5 + X_{10}}{4}, \quad T_3 = \frac{X_2 + 2X_4 + 3X_6 + 2X_8 + X_{10}}{5},$$

calcolarne l'errore quadratico medio ed individuare, motivando la risposta, quello più efficiente.

[punti 3]

Q3

(Q4) Supponiamo che il numero di persone che ogni giorno entra in un negozio sia una variabile aleatoria X di Poisson avente una certa media λ che vogliamo stimare. Se in 20 giorni il numero totale di persone entrate nel negozio è di 857, calcolare la stima di massima verosimiglianza per λ, motivando la risposta.

[PUNTI 3]

Q4

(Q5) Supponiamo di avere 2 urne. La prima urna contiene 2 biglie bianche ed 1 biglia nera, la seconda 2 biglie nere ed 1 bianca. Prendiamo a caso una biglia dalla prima urna ed una dalla seconda e cambiamole di urna. Siano X_1 ed X_2 il numero di biglie nere nella prima e nella seconda urna dopo questa operazione. Determinare la densità congiunta di (X_1, X_2).

[PUNTI 3]

Q5

(Q6) Sia X il numero delle volte che esce *Testa* in due lanci di una moneta truccata, per la quale la probabilità di uscita di *Testa* in ogni lancio è $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Sia invece Y il numero delle volte che esce un numero pari, effettuando tre lanci di un dado perfetto a sei facce. Determinare se le v.a. X e Y siano indipendenti, motivando la risposta. Trovare poi la legge di Y e, sapendo che $2^7 \cdot P[X = 2, Y = 3] = 1$, determinare anche quella di X.

[PUNTI 3]

Q6

(Q7) Si esamina un campione di $n = 100$ frigoriferi e si trova che la media campionaria del loro tempo di vita è $\overline{x}_n = 50$(mesi). Ipotizzando che il tempo di vita di un frigorifero del campione sia una v.a. X con varianza $\sigma^2 = 144$ e media μ incognita, si determini un intervallo di confidenza al livello di confidenza $1 - \alpha = 0.95$ per la media incognita μ.

[PUNTI 3]

Q7

(Q8) In una certa località, la popolazione delle persone in possesso della patente automobilistica è composta per il 47% da uomini e per il 53% da donne. Le statistiche mostrano che il 40% degli uomini ha un incidente nell'arco di un anno, mentre la stessa percentuale per le donne scende al 20%. Se un individuo ha avuto un incidente nel dato anno, qual è la probabilità che si sia trattato di una donna?

[PUNTI 3]

Q8

(Q9) Un segnale, emesso all'istante $t = 0$, giunge al ricevitore in un tempo aleatorio X (misurato in secondi) avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare la funzione di ripartizione di X.

[PUNTI 3]

Q9

(Q10) Il tempo di esecuzione di un programma è una variabile aleatoria X (misurata in secondi) distribuita normalmente con media μ e varianza σ^2. Sapendo che $P[X \leq 160] = \frac{1}{2}$ e $P[X \leq 140] = 0.25143$, dopo aver determinato μ e σ^2, calcolare $P[X > 200]$.

[PUNTI 3]

Q10

(Q11) Un programma informatico richiede una percentuale della memoria del computer data da una variabile aleatoria X avente densità di probabilità

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta} & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove θ è un parametro positivo incognito. Determinare uno stimatore per θ con il metodo dei momenti e dare una stima di θ nel caso in cui 8 osservazioni di X abbiano fornito i seguenti valori:

$$0.25,\ 0.45,\ 0.55,\ 0.75,\ 0.85,\ 0.85,\ 0.95,\ 0.90.$$

[PUNTI 3]

Q11