Probabilità e Statistica
Esercitazioni

a.a. 2006/2007

C.d.L.: Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio, Ingegneria Civile, Ingegneria Gestionale, Ingegneria dell'Informazione

C.d.L.S.: Ingegneria Civile

Estrazioni-II

Ines Campa e Marco Longhi

Problema delle prove ripetute

Gettiamo un dado regolare e calcoliamo la probabilità che in successivi cinque lanci la faccia 1 si presenti soltanto la prima volta e poi non si presenti più nei successivi lanci.
Siamo di fronte a un *evento prodotto logico* di una sequenza di cinque *eventi indipendenti*. La probabilità dell'evento

$$E = \{\text{esce la faccia 1}\} \text{ è } \; P\left(E\right) = \frac{1}{6},$$

mentre $P\left(\overline{E}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. La probabilità richiesta è

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^5}$$

Abbandoniamo ora la richiesta che la faccia 1 esca la prima volta e consideriamo il caso in cui la faccia 1 esca una sola volta, non importa in quale posizione della sequenza. Le cinque possibilità sono tutte incompatibili tra di loro, ciascuna con ugual valore di probabilità p.

Dobbiamo applicare il teorema della *somma logica di eventi* sommando cinque volte il valore appena trovato, quindi

$$5 \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^5}{6^5}$$

Il numero delle volte che si può presentare la sequenza è uguale al numero di permutazioni di 5 elementi di cui 1 ripetuto una volta e l'altro ripetuto quattro volte o equivalentemente al numero dei modi con cui un elemento può occupare cinque posti a disposizione. Infatti

$$P^*_{1,4} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array} \right)$$

Generalizziamo il problema.
Consideriamo n eventi indipendenti $E_1, E_2, \cdots E_n$ tali che $P(E_k) = p$ con $k = 1, 2, \cdots, n$.
Sia $q = P\left(\overline{E}_k\right) = 1 - p$ con $k = 1, 2, \cdots, n$.
La probabilità che non si verifichi *nessuno* degli eventi E_k, con $k = 1, 2, \cdots, n$ è

$$P\left(\overline{E}_1 \cap \cdots \cap \overline{E}_n\right) = q^n$$

La probabilità che si verifichi *almeno* 1 degli eventi E_k, con $k = 1, 2, \cdots, n$ è

$$P(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - P\left(\overline{E}_1 \cap \cdots \cap \overline{E}_n\right) = 1 - q^n$$

La probabilità che si verifichi *un solo* evento è

$$P\left(\left(E_1 \cap \overline{E}_2 \cap \cdots \cap \overline{E}_n\right) \cup \left(\overline{E}_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap \overline{E}_n\right) \cup \left(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \cdots \cap E_n\right)\right) =$$

$$= n \cdot p \cdot q^{n-1}$$

La probabilità che si verifichino *esattamente* k eventi tra gli n dati è

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad k = 0, 1, \cdots n$$

Tale distribuzione di probabilità è detta `binomiale`, se $k = 1$ di `Bernoulli`
Indichiamo con

$$B_k = \{\text{si verificano esattamente } k \text{ eventi tra gli } n \text{ dati}\}, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{n} P(B_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = 1$$

Equivalentemente, se abbiamo un evento E con probabilità costante p di verificarsi e vogliamo calcolare la probabilità che l'evento E si verifichi k volte in n prove indipendenti.
L'evento costante $\overline{E}$ ha probabilità di verificarsi $q = 1 - p$.
Se fissiamo l'ordine delle k volte che l'evento si deve verificare, la probabilità richiesta è

$$p^k \cdot q^{n-k}$$

Se non ci interessa l'ordine, dobbiamo applicare il teorema della somma logica di eventi e quindi moltiplicare il valore precedente per il numero dei modi in cui si possono scegliere k oggetti tra n, quindi la probabilità richiesta è

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Sia $\{e_1, e_2, \cdots e_N\}$ una popolazione, ovvero un insieme finito di N elementi, supponiamo che gli elementi della popolazione abbiano due caratteristiche distinte in proporzione rispettivamente p e q. Si estrae dalla popolazione n volte, con *reimmissione*.

Ponendo

$$E_k = \{\text{escono esattamente } k \text{ elementi con la prima caratteristica in } n \text{ estrazioni}\}$$

con $k = 0, 1, \cdots, n$.

Si ha

$$P(E_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad k = 0, 1, \cdots n$$

Esercizio 1 (Esercizio tipo tema d'esame 10/01/2006). Si lanciano contemporaneamente due dadi per 7 volte. Calcolare la probabilità che

1. la somma dei punteggi delle due facce rivolte verso l'alto risulti 4 o un suo multiplo esattamente per 2 volte;
2. la somma dei punteggi delle due facce rivolte verso l'alto risulti 4 o un suo multiplo almeno per 2 volte.

Esercizio 2. Un'urna contiene 25 palline, di cui 10 rosse e 15 bianche. Si estrae per 6 volte una pallina, rimettendo ogni volta la pallina nell'urna. Calcolare la probabilità di estrarre per 3 volte una pallina rossa.

Esercizio 3. In una scatola sono contenute 20 lampadine di cui 5 guaste. Calcolare la probabilità che in una successione di estrazioni indipendenti e ripetute

1. la prima lampadina guasta estratta si abbia alla sesta estrazione;
2. la prima lampadina guasta estratta si abbia dopo diciotto estrazioni.

Esercizio 4 (Tema d'esame del 10/01/2006). Un pescatore si reca a pescare solamente in due zone: zona A e zona B. Egli ha probabilità $\frac{2}{5}$ di scegliere la zona A e $\frac{3}{5}$ di scegliere la zona B. In A il pescatore ha probabilità $\frac{1}{5}$ di catturare un pesce ogni volta che getta l'amo, in B, invece, $\frac{1}{2}$. Sapendo che il pescatore ha fatto 3 tentativi indipendenti senza riuscire a pescare un pesce, calcolare la probabilità che stia pescando nella zona B.

Esercizio 5 (Tema d'esame del 25/07/2006). Una famiglia ha 6 figli. Nell'ipotesi che la nascita di un figlio maschio abbia la stessa probabilità della nascita di una figlia femmina, determinare la probabilità che, scelti a caso 3 figli, almeno 1 sia maschio.

Esercizio 6 (Tema d'esame del 05/09/2006). Nella fase finale dei campionati del mondo, Italia e Francia si affrontano in uno scontro ad eliminazione diretta. Persistendo il risultato di parità $(0-0)$ fino alla fine del secondo tempo supplementare, le due squadre procedono alla routine dei calci di rigore. Sapendo che ogni giocatore francese ha probabilità $0,8$ di segnare, mentre ogni giocatore italiano ha probabilità $0,6$ di segnare, calcolare la probabilità che, dopo due tiri dal dischetto effettuati da ogni squadra, il risultato sia

1. 0 -0;
2. 1 - 1;
3. 2 - 2;
4. in parità.

Circuiti in serie o parallelo

- Macchinari con componenti collegati in serie:
  $\{$il funzionamento dei macchinari$\}$ è uguale all'intersezione degli eventi funzionamento dei singoli componenti.
- Macchinari con componenti collegati in parallelo:
  $\{$il funzionamento dei macchinari$\}$ è uguale all'unione degli eventi funzionamento dei singoli componenti.

Esercizio 7. Marco compra una serie di 20 lampadine per addobbare un albero di Natale. Calcolare la probabilità che dopo 150 ore, l'albero sia ancora illuminato, sapendo che le lampadine hanno la stessa probabilità pari a $\frac{1}{3}$ di funzionare ancora indipendentemente tra loro dopo 150 ore.

Esercizio 8. Calcolare la probabilità che una stanza per conferenze con 20 lampadine sia illuminata, supponendo che tali lampadine, dopo un dato periodo di funzionamento, abbiano tutte la stessa probabilità pari a $\frac{1}{3}$ di funzionare ancora indipendentemente tra loro.
