Probabilità e Statistica
Esercitazioni

a.a. 2006/2007

C.d.L.: Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio, Ingegneria Civile, Ingegneria Gestionale, Ingegneria dell'Informazione

C.d.L.S.: Ingegneria Civile

Variabili casuali I

Ines Campa e Marco Longhi

Esercizi

Esercizio 1. Dire se le seguenti funzioni sono funzioni di ripartizione di una variabile casuale reale:

1.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1 & \text{se } 5 < x \leq 10 \\ 1 & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

2.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -x + 3 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Si consideri un'urna contenente 6 palline verdi e 4 blu. Sia X la variabile casuale discreta che denota il numero di palline verdi estratte in un'estrazione in blocco di 3 palline. Determinare

1. la funzione densità di probabilità e tracciarne il grafico;
2. la funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico;
3. la probabilità che al più 1 pallina sia verde;
4. $P[0 < X \leq 2]$, $P[1 \leq X \leq 3]$.

Esercizio 3. Si consideri la variabile casuale continua X che rappresenta la durata di un pezzo in anni, con densità di probabilità data da

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{78}\left(x^2+1\right) & \text{se } 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare

1. $P(X \leq 4)$;
2. $P(2 < X \leq 5)$;
3. $P(X > 2)$.

Esercizio 4. Calcolare la costante di normalizzazione della densità di probabilità di una variabile casuale X definita da

$$f_X(x) = \begin{cases} Ce^{-2x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare, inoltre, $P(X > 1)$.

Esercizio 5. Sia assegnata una variabile casuale X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Calcolare la corrispondente funzione di ripartizione.

Esercizio 6. La funzione di ripartizione di una variabile casuale X è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{3}{4}x^2\left(1 - \frac{1}{3}x\right) & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Determinare $P\left(X > \frac{2}{3}\right)$ e $P(-1 < X \leq 1)$.

Esercizio 7 (Tema d'esame del 09/12/2003).

1. Determinare la costante k di normalizzazione della densità di una variabile casuale X definita da

$$f_X(x) = \begin{cases} k\,x(2-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 2, \end{cases}$$

   e tracciare il grafico di $f_X(x)$.
2. Determinare la corrispondente funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico.
3. Calcolare $p[X > 1]$ e $E[X]$.

Esercizio 8. Determinare la funzione di densità associata alla funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1 & \text{se } 5 < x \leq 10 \\ 1 & \text{se } x > 10 \end{cases}$$

Determinare, inoltre, $E[X]$

Esercizio 9. Il tempo di vita di un fusibile è una variabile casuale X di densità

$$f_X(x) = a^2 x \cdot e^{-ax} \cdot I_{[0,+\infty)}(x) \,.$$

Calcolare il tempo di vita media.

Esercizio 10. Supponiamo che il tempo necessario per riparare un personal computer sia una variabile casuale misurata in ore la cui densità è data da

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Il costo del lavoro è variabile, se sono necessarie x ore per la riparazione, il relativo costo è pari a $40 + 30\sqrt{x}$ euro. Calcolare il valore atteso del costo di una riparazione.

Esercizio 11. Si consideri l'estrazione in blocco di 3 palline da un'urna contenente 6 palline verdi e 4 blu. Sia X la variabile casuale discreta che denota il numero di palline verdi estratte. Determinare $E\left[X\right]$, $\mathrm{var}\left[X\right]$ e σ_X.

Esercizio 12. Si consideri il lancio di una coppia di dadi indipendenti e non truccati. Sia X la variabile casuale discreta che denota il minimo dei punti usciti. Determinare

1. la funzione di massa di probabilità e tracciarne il grafico;
2. la funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico;
3. la probabilità che lanciando i dadi il minimo dei punti usciti sia al più 3;
4. $P\left(X > 5\right)$, $P\left(2 < X \leq 4\right)$ e $P\left(2 \leq X \leq 4\right)$;
5. $E\left[X\right]$, $\mathrm{var}\left[X\right]$ e σ_X.

Esercizio 13. Sia assegnata una variabile casuale X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}\left(4x - 2x^2\right) & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare $E[X]$, $\mathrm{var}[X]$ e σ_X.

Esercizio 14. Sapendo che $E[X] = 2$, $E\left[X^2\right] = 8$, calcolare $E\left[4(1+2X)^2\right]$.

Esercizio 15 (Tema d'esame del 13/12/2005).
Sia X la variabile aleatoria avente densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{9} & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare il momento assoluto del secondo ordine e $\mathrm{var}[X]$.

Esercizio 16. Un'urna contiene 30 palline numerate da 1 a 30. Sia X la variabile casuale che denota il resto della divisione col numero 6 del numero inciso sulla pallina estratta. Determinare $E\left[X\right]$, $\mathrm{var}\left[X\right]$ e σ_X.

Esercizio 17 (Tema d'esame del 28/06/2005).
Sia assegnata una variabile casuale X con densità di probabilità

$$f_X\left(x\right) = \begin{cases} -\frac{1}{15}x^2 + \frac{2}{5} & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare $E\left[X\right]$.

Esercizio 18 (Tema d'esame del 28/06/2005).

La quantità (in quintali) di rifiuti smaltiti da un'industria in giornata è una variabile aleatoria X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{se } 0 \leq x \leq 5a \\ k(10a - x) & \text{se } 5a < x \leq 10a \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Nel caso in cui $a = \frac{6}{5}$, si chiede:

1. Calcolare k e disegnare il grafico di $f_X(x)$.
2. Considerati gli eventi

$$A = \{\text{i rifiuti smaltiti sono più di } 5a \text{ quintali}\}$$

$$B = \{\text{i rifiuti smaltiti sono meno di } 5a \text{ quintali}\}$$

$$C = \{\text{la quantità di rifiuti smaltiti è compresa tra } 2,5a \text{ e } 7,5a \text{ quintali}\},$$

calcolare la probabilità $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$. Gli eventi A e B sono indipendenti? Gli eventi A e C sono indipendenti?

Esercizio 19. Dall'esperienza passata, un docente sa che se si sceglie uno studente a caso, il suo punteggio all'esame di fine corso di laurea sarà una variabile casuale di media 75.

1. Dare un limite superiore alla probabilità che un punteggio superi gli 85 punti.
2. Supponendo che sia nota anche la varianza di tale variabile aleatoria, pari a 25, cosa si può dire sulla probabilità che uno studente ottenga un punteggio compreso tra 65 e 85.

Esercizio 20 (Tema d'esame del 07/12/2004).

Il tempo, in ore, della durata di funzionamento di un computer (prima di bloccarsi) è una variabile aleatoria continua data da

$$f_X(x) = \begin{cases} C\, e^{\frac{-x}{100}} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

1. Determinare la costante C di normalizzazione e tracciare il grafico di $f_X(x)$.
2. Determinare la corrispondente funzione di ripartizione F_X e tracciarne il grafico.
3. Qual è la probabilità che il computer funzioni tra le 50 e le 150 ore prima di bloccarsi?

Esercizio 21 (Tema d'esame del 22/12/2003).

1. Verificare che la seguente funzione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ \ln x & \text{se } 1 < x \leq e \\ 1 & \text{se } x > e \end{cases}$$

   è una funzione di ripartizione di una variabile casuale X e tracciarne il grafico.
2. Determinare la corrispondente funzione di densità f_X e tracciarne il grafico.
3. Calcolare $E[X]$ e $\mathrm{var}[X]$.
4. Calcolare $p[X > 3]$ e $p[X > 2]$.

Esercizio 22 (Esercizio tratto dal tema d'esame del 22/12/2003).

Sia X la variabile casuale avente funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-(x-2)} & \text{se } x > 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare la corrispondente mediana $\mathrm{med}[X]$.