

Probabilità e Statistica Esercitazioni

a.a. 2006/2007

C.d.L.: Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio, Ingegneria Civile, Ingegneria Gestionale, Ingegneria dell'Informazione

C.d.L.S.: Ingegneria Civile

Variabili casuali multidimensionali

Ines Campa e Marco Longhi

Esercizi

Esercizio 1. Due fabbriche diverse producono lo stesso componente per macchinari. I pezzi vengono classificati in base alla fabbrica che li ha prodotti e ai loro difetti. Sia X il numero della fabbrica (1 o 2) e Y il numero dei difetti per pezzo (0,1, 2 o 3), di un pezzo scelto a caso tra la totalità di quelli esistenti. La tabella seguente riporta la funzione di massa di probabilità congiunta delle variabili casuali discrete X e Y .

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$
$X = 2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

1. Determinare le distribuzioni marginale di X e Y .
2. Calcolare $E[X]$, $E[Y]$, $\text{var}[X]$ e $\text{var}[Y]$.
3. Determinare la covarianza $\text{cov}[X, Y]$ delle variabili X e Y .

Esercizio 2 (Esercizio tratto dal tema d'esame del 05/09/2006).

Data la funzione

$$f(x, y) = C \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) \cdot I_{(0,1)}(x) \cdot I_{(0,2)}(y).$$

calcolare la costante C in modo che $f(x, y)$ sia una funzione di densità di probabilità congiunta di X e Y . Determinare, inoltre,

- $P \left[0 < X < \frac{1}{2}, 0 < Y < 1 \right]$;
- $P[X > Y]$.

Esercizio 3 (Esercizio tratto dal tema d'esame del 05/09/2006).

Data la funzione di densità di probabilità congiunta di X e Y

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) \cdot I_{(0,1)}(x) \cdot I_{(0,2)}(y).$$

Calcolare

1. la funzione di ripartizione congiunta $F(x, y)$.
 2. la funzione di densità di probabilità marginale $f_X(x)$.
-

Esercizio 4. Data la funzione di densità di probabilità congiunta di X e Y

$$f(x, y) = (kxy + x) \cdot I_U(x, y),$$

dove $U = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$. Calcolare

1. la costante di normalizzazione k ,
2. le funzioni di densità di probabilità marginale di X e Y .

Esercizio 5 (Esercizio tratto dal tema d'esame del 05/09/2006).

Data la funzione di densità di probabilità congiunta di X e Y

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) \cdot I_{(0,1)}(x) \cdot I_{(0,2)}(y).$$

Calcolare

1. la funzione di densità di probabilità condizionata di Y data $X = x : f_{Y|X}(y|x)$;
2. la funzione di ripartizione condizionata di Y , dato $X = x : F_{Y|X}(y|x)$;
3. determinare inoltre se X e Y sono indipendenti.

Esercizio 6. Data la funzione di densità di probabilità congiunta di X e Y

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) \cdot I_{(0,1)}(x) \cdot I_{(0,2)}(y).$$

Calcolare $E[XY]$, $E[Y^3]$, $E[X]$ e $E[Y]$.

Esercizio 7. Data la funzione di densità di probabilità congiunta di X e Y

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) \cdot I_{(0,1)}(x) \cdot I_{(0,2)}(y).$$

Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho_{X,Y}$.

Esercizio 8 (Esercizio tratto dal tema d'esame del 05/09/2006).

Data la funzione di densità di probabilità congiunta di X e Y

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) \cdot I_{(0,1)}(x) \cdot I_{(0,2)}(y).$$

Calcolare $E[Y|X = x]$.

Esercizio 9. Data la funzione di densità di probabilità congiunta di X e Y

$$f(x, y) = x \cdot e^{-(x+y)} \cdot I_{(0, +\infty)}(x) \cdot I_{(0, +\infty)}(y).$$

Calcolare

1. la funzione di densità di probabilità marginale $f_X(x)$,
2. la funzione di densità di probabilità marginale $f_Y(y)$,
3. dire se le due variabili casuali X e Y sono indipendenti.

Esercizio 10 (Tema d'esame del 10/01/2006).

Sia X una variabile aleatoria che assume i valori $\{0, 1\}$ e Y una variabile aleatoria che assume i valori $\{2, 3\}$. Sapendo che

$$P[Y = 2] = \frac{2}{5}$$

$$P[X = 0|Y = 2] = P[Y = 2|X = 0] = \frac{1}{3}$$

calcolare la densità di probabilità congiunta di X e Y e la $\text{cov}[X, Y]$.

Esercizio 11 (Tema d'esame del 10/01/2006).

Sia (X, Y) la variabile aleatoria bidimensionale avente densità di probabilità congiunta di X e Y .

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}xy & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare $P[Y < X + 2]$.

Esercizio 12 (Tema d'esame del 11/04/2006).

Sia (X, Y) la variabile aleatoria bidimensionale avente densità di probabilità

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 8xy^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x^2 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare $P[Y < X]$.

Esercizio 13 (Tema d'esame del 25/07/2006).

Sia (X, Y) la variabile aleatoria bidimensionale avente densità di probabilità

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{xy}} & 0 < y < 1 \text{ e } y < x < 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si chiede:

1. determinare la costante $k \in \mathbb{R}$ di normalizzazione;
2. determinare la densità marginale di Y ;
3. determinare la densità marginale di X ;
4. determinare $F_Y(y)$;
5. determinare $f_{X|Y}(x|y)$ per $0 < y < 1$;
6. calcolare $E \left[X | Y = \frac{1}{4} \right]$.

Esercizio 14 (Tema d'esame del 13/12/2005).

Data la seguente funzione

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{kx}{y} & \text{se } 0 \leq x \leq a \text{ e } 1 \leq y \leq e, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

nel caso in cui $a = 2$,

1. determinare il valore della costante k affinché $f_{X,Y}(x,y)$ sia una funzione di densità di probabilità congiunta nella variabile aleatoria bidimensionale X, Y ;
2. verificare l'indipendenza delle componenti marginali X e Y ;
3. calcolare $\text{var} \left[\frac{X}{a} - Y \right]$.