Statistica e Analisi Matematica - 07.09.2009

Cognome e Nome ....

C. d. L.: GESL   Anno di Corso: 1 2 3 altro

Matricola .... Firma ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte precedente queste istruzioni; in particolare, **scrivere cognome e nome (in stampatello) e firmare.**
2. SCRIVERE, in modo incontrovertibile, la risposta nello spazio lasciato **dopo** ogni quesito; in caso di correzione, barrare la risposta errata e scrivere accanto la nuova risposta.
3. I PUNTEGGI attribuiti per la risposta esatta sono indicati alla fine di ogni quesito.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, telefoni cellulari.
5. CONSEGNARE **questi fogli e tutti i fogli di protocollo**.
6. TEMPO a disposizione: 150 min.

Quesito	S1	S2	S3	S4	A1	A2	A3	A4	TOT
Punti									

(S1) Sia $X_1, \dots, X_n$ un campione aleatorio di ampiezza n, estratto da una popolazione distribuita con densità di probabilità $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f_X(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta^3}{2}\, x^2\, e^{-\theta x} & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con $\theta > 0$. Determinare uno stimatore T di θ con il metodo di massima verosimiglianza.

[punti 4]

S1

(S2) Sia X una variabile aleatoria normale di media 10 e deviazione standard $1,5$.

(a) Determinare a in modo che $P\left[16 \le \dfrac{8}{5}X \le a\right] = 0,49061$.

(b) Sia Y la variabile aleatoria, indipendente da X, avente densità di probabilità $f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} y^3 & \text{se } \ 0 < y < 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare $\operatorname{var}[2X - 15Y]$.

[punti 4]

S2

(a)

(b)

(S3) Dieci comodini identici hanno ognuno due cassetti:

- cinque comodini contengono ciascuno una moneta d'argento in un cassetto ed una moneta d'oro nell'altro cassetto,
- quattro comodini contengono ciascuno una moneta d'argento in ogni cassetto,
- un comodino contiene una moneta d'argento in un cassetto ed una moneta di bronzo nell'altro.

Si sceglie a caso un comodino, si apre uno dei due cassetti e si trova una moneta d'argento. Qual è la probabilità che vi sia una moneta d'argento nell'altro cassetto?

[PUNTI 4]

S2 (scrivere il risultato in frazione ridotta ai minimi termini)

(S4) Sia (X, Y) la variabile aleatoria bidimensionale avente densità di probabilità $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } \ 0 < x < y \ \text{ e } \ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Determinare $f_{Y|X}(y|x)$ per $0 < x < 1$.

(b) Determinare $F_{Y|X}(y|x)$ per $0 < x < 1$.

[PUNTI 4]

S4

(a)

(b)

(A1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = y + x^2.$$

Determinare il minimo m ed il massimo M di f vincolata a $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + 4y^2 \leq 4\right\}$, specificando in quali punti essi vengano assunti.

[PUNTI 4]

A1

(A2) Determinare l'equazione della curva $\vec{\gamma} : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ sapendo che $\vec{\gamma}'(t) = 3\, e^{3t}\, \vec{\imath} - 4\, e^{2t}\, \vec{\jmath}$ e $\vec{\gamma}(0) = \vec{\imath} + 3\, \vec{\jmath}$.
[PUNTI 4]

A2

(A3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione data da $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)(y + x + \alpha + 3)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Verificare se $(0, 0)$ sia un punto stazionario di f ed, in caso affermativo, classificarlo al variare di α.

[PUNTI 4]

A3

(A4) Calcolare

$$\iint_T \left[x\, e^{\sin\left(x^2+y^2\right)} + |y|\right] dx\, dy,$$

dove $T = T_1 \cup T_2$ con

$$T_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{e} \quad y \geq 0\right\},$$

$$T_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -2 \leq y \leq 0 \quad \text{e} \quad -y - 2 \leq x \leq y + 2\right\}.$$

[PUNTI 4]

A4