Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Baricentri

Maria Grazia Naso

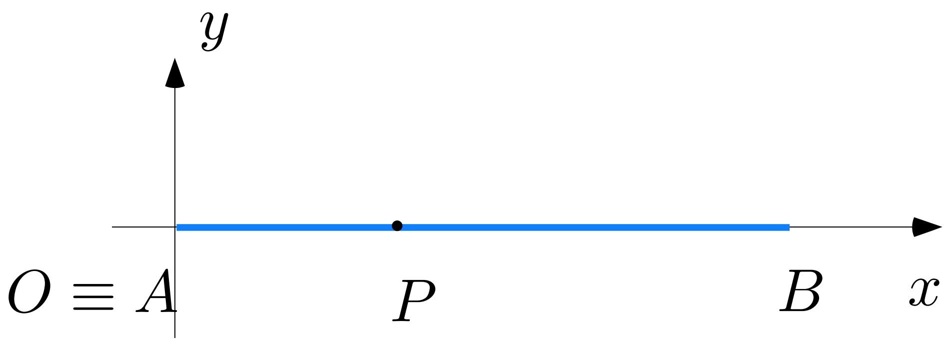
naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Asta omogenea

Determiniamo il baricentro di un'asta AB, di lunghezza L e densità constante ρ.

Scelto il sistema di riferimento Oxy come in figura

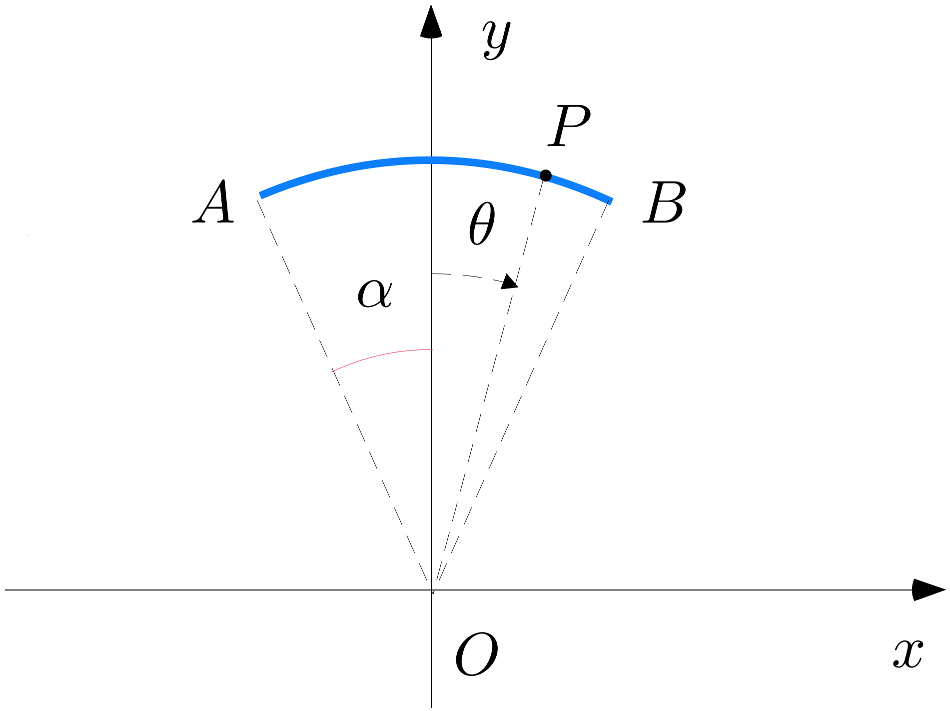


il baricentro G dell'asta appartiene all'asse x. Quindi $\boxed{y_G = 0}$. Per definizione

$$\boxed{x_G =} \frac{\displaystyle\int_0^L x\,\rho\,dx}{\displaystyle\int_0^L \rho\,dx} \boxed{= \frac{L}{2}}.$$

Arco di circonferenza omogeneo

Determiniamo il baricentro di un arco di circonferenza omogeneo di raggio R e apertura $A\widehat{O}B = 2\alpha$.
Si introduca il riferimento cartesiano Oxy, con origine O nel centro della circonferenza cui appartiene l'arco e asse y coincidente con l'asse di simmetria dell'arco.



Per simmetria si ha $\boxed{x_G = 0}$.

Sia P un punto dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ e $y^+\widehat{O}P := \theta \in [-\alpha, \alpha]$. Indicata con ρ la densità (costante) di massa, la massa dell'arco $\overset{\frown}{AB}$ è $m = \rho\, 2R\alpha$ e $\overset{\frown}{AB} = 2R\alpha$. Risulta

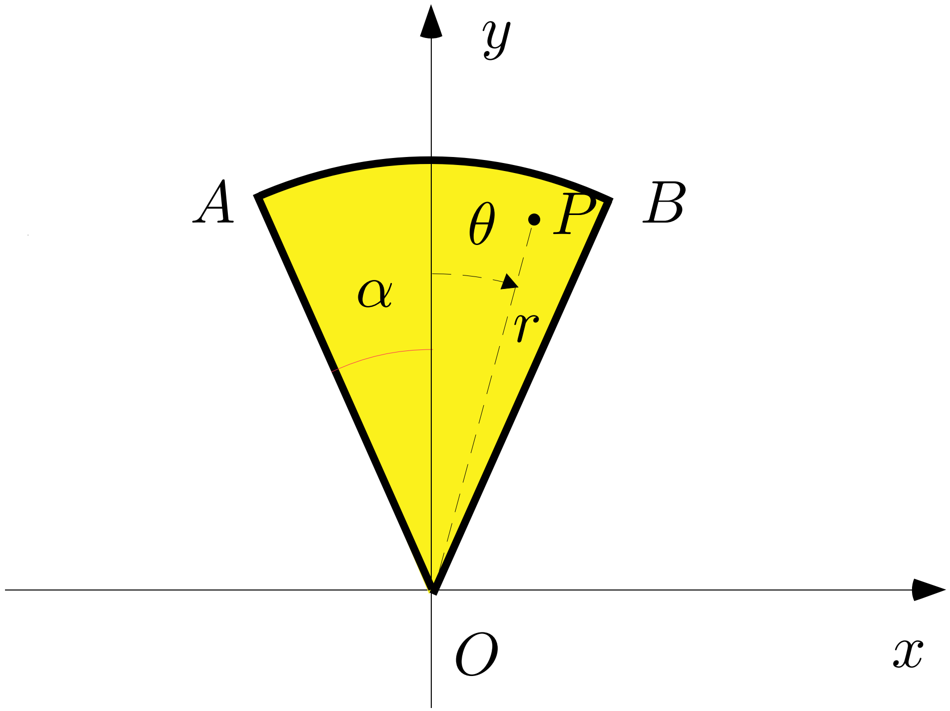
$$\boxed{y_G} = \frac{1}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho\, \underbrace{R\cos\theta}_{=y_P}\, \underbrace{R\, d\theta}_{=dl} \boxed{= R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}}.$$

► Nel caso di una *semicirconferenza* $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$: $\boxed{x_G = 0,\ y_G = \frac{2R}{\pi}}$.

Settore circolare omogeneo

Determiniamo il baricentro di un settore circolare omogeneo di raggio R e apertura $A\widehat{O}B = 2\alpha$.

Si introduca il riferimento cartesiano Oxy, con origine O nel centro del cerchio a cui appartiene il settore circolare e asse y coincidente con l'asse di simmetria del settore.



Per simmetria si ha $\boxed{x_G = 0}$.

Sia P un punto del settore circolare AB. Siano $y^+\widehat{O}P := \theta \in [-\alpha, \alpha]$ e $|P - O| := r \in [0, R]$. Indicata con ρ la densità (costante) di massa, la massa del settore circolare AB è $m = \rho\, R^2\, \alpha$. Risulta

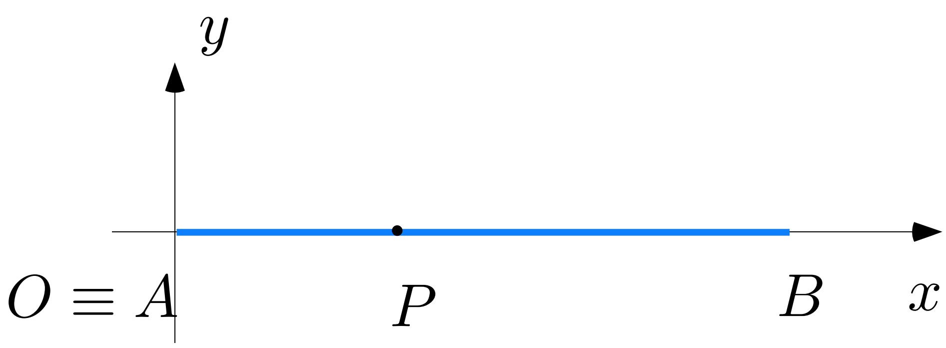
$$\boxed{y_G} = \frac{1}{m} \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho \underbrace{r \cos\theta}_{=y_P} \underbrace{r\, d\theta\, dr}_{=dS} \boxed{= \frac{2R}{3} \frac{\sin\alpha}{\alpha}}.$$

- Nel caso di un *semicerchio* $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$: $\boxed{x_G = 0,\ y_G = \frac{4R}{3\pi}}$.

Asta non omogenea

Determiniamo il baricentro di un'asta AB, di lunghezza L e densità $\rho(P) = \rho_0\left(1 + k\,\overline{AP}^{\alpha}\right)$, $P \in AB$, $\rho_0 > 0$, k, $\alpha \geq 0$.

Scelto il sistema di riferimento Oxy come in figura



il baricentro G dell'asta appartiene all'asse x. Quindi $\boxed{y_G = 0}$. Per definizione

$$\boxed{x_G =} \frac{\displaystyle\int_0^L x\,\rho(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^L \rho(x)\,dx} = \frac{\displaystyle\int_0^L x\,\rho_0\left(1 + k\,\overline{OP}^\alpha\right)\,dx}{\displaystyle\int_0^L \rho_0\left(1 + k\,\overline{OP}^\alpha\right)\,dx}$$

$$= \boxed{\frac{L}{2}\,\frac{1 + \dfrac{2kL^\alpha}{\alpha+2}}{1 + \dfrac{kL^\alpha}{\alpha+1}}}.$$

▶ *Asta omogenea* $(k = 0$ o $\alpha = 0) \Rightarrow \boxed{x_G = \dfrac{L}{2}}$.

Esercizio 1. Determinare il baricentro di un'asta AB non omogenea, di lunghezza L ed avente

(a) *densità lineare*: $\rho(P) = k|P - A|$, dove $P \in AB$, $k > 0$.

(b) *densità quadratica*: $\rho(P) = k|P - A|^2$, dove $P \in AB$, $k > 0$.

Risoluzione. In entrambi i casi il baricentro G dell'asta AB appartiene al segmento AB.

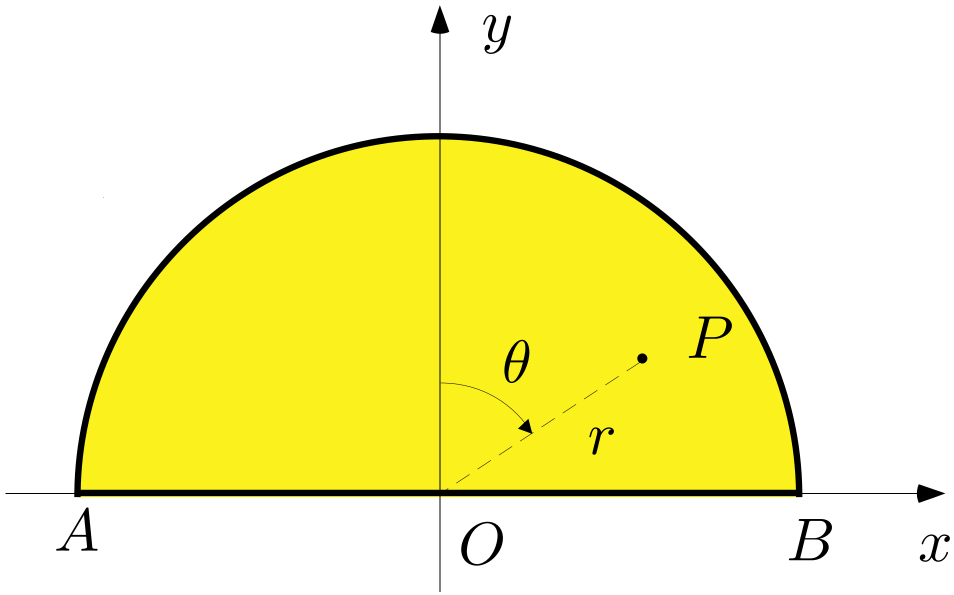
(a) $\overline{AG} = \dfrac{2}{3}\,L$.

(b) $\overline{AG} = \dfrac{3}{4}\,L$.

Semidisco non omogeneo

Determiniamo il baricentro di un semidisco non omogeneo di raggio R e densità $\rho(P) = k\left(1 + \frac{1}{R}\overline{OP}\right)$, dove P è un punto del semidisco e $k > 0$.

Si introduca il riferimento cartesiano Oxy, come in figura.



Per simmetria si ha $\boxed{x_G = 0}$.

Sia P un punto del semidisco. Siano $y^+\widehat{O}P := \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $|P - O| := r \in [0, R]$. La massa del semidisco è

$$m = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R k\left(1 + \frac{r}{R}\right) \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{=dS} = \frac{5}{6}\,k\pi\,R^2.$$

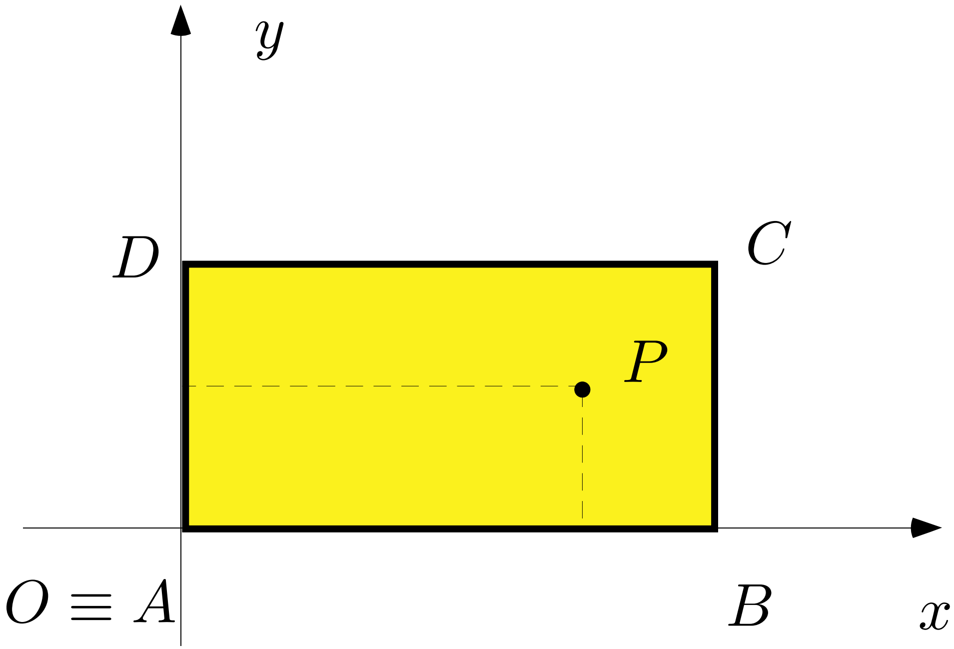
Si ha

$$\boxed{y_G} = \frac{1}{m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R k\left(1 + \frac{r}{R}\right) \underbrace{r\cos\theta}_{=y_P}\, \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{=dS} \boxed{= \frac{7R}{5\pi}}.$$

Lamina rettangolare non omogenea

Determiniamo il baricentro di una lamina rettangolare $ABCD$, con $\overline{AB} = a$ e $\overline{AD} = b$, non omogenea di densità $\rho(P) = k\,\overline{OP}^2$, dove P è un punto della lamina $ABCD$ e $k > 0$.

Si introduca il riferimento cartesiano Oxy, come in figura.



Sia P un punto della lamina $ABCD$. Siano $x_P := x \in [0, a]$ e $y_P := y \in [0, b]$. La massa della lamina è

$$m = \int_0^b \int_0^a k \left(x^2 + y^2\right) \underbrace{dx\, dy}_{=dS} = \frac{1}{3} kab \left(a^2 + b^2\right).$$

Si ha

$$\boxed{x_G} = \frac{1}{m} \int_0^b \int_0^a k \underbrace{x}_{=x_P} \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy \boxed{= \frac{a\left(3a^2 + 2b^2\right)}{4\left(a^2 + b^2\right)}}.$$

Analogamente $\boxed{y_G = \frac{b\left(2a^2 + 3b^2\right)}{4\left(a^2 + b^2\right)}}$.

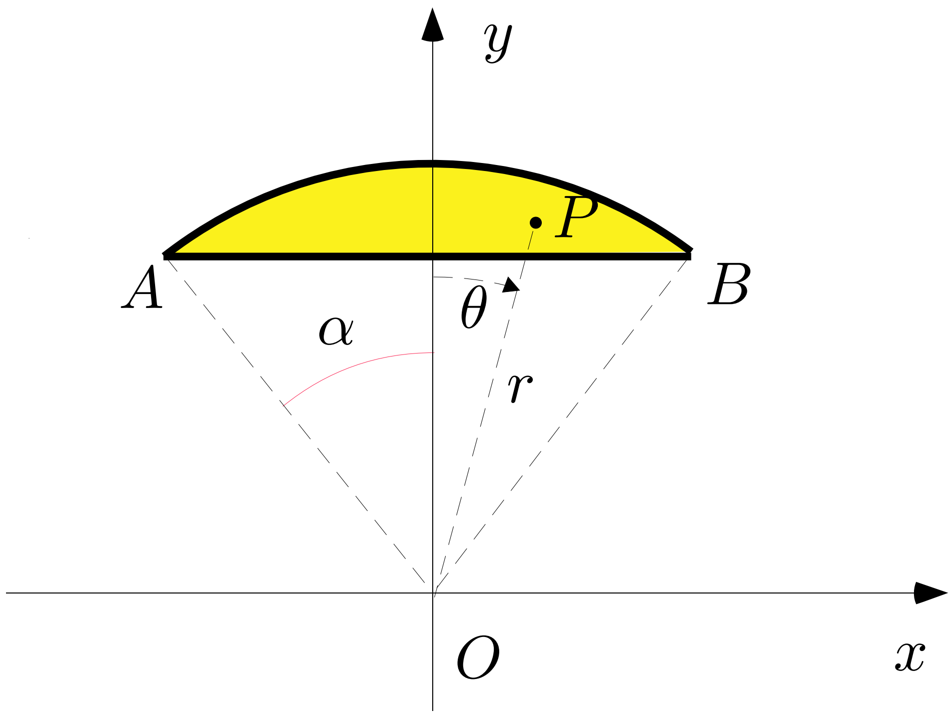
Applicazione della proprietà distributiva nel calcolo del baricentro di una figura composta

Teorema 1 (Proprietà distributiva del baricentro). *Comunque si scomponga un sistema materiale nella somma di due sistemi, rispettivamente di massa* m_1 *ed* m_2 *e di baricentri* G_1 *e* G_2*, allora il baricentro* G *di tutto il sistema di massa* m *coincide con il baricentro del sistema formato dai due punti materiali* (G_1, m_1) *e* (G_2, m_2)*, cioè*

$$(G - O) = \frac{m_1(G_1 - O) + m_2(G_2 - O)}{m_1 + m_2}\,.$$

Segmento circolare (omogeneo) ad una base

Determiniamo il baricentro di un segmento circolare (omogeneo) ad una base di raggio R e apertura $A\widehat{O}B = 2\alpha$.
Si introduca il riferimento cartesiano Oxy, come in figura.



Sia P un punto del segmento circolare ad una base e siano $y^+\widehat{O}P := \theta \in [-\alpha, \alpha]$, $\overline{OP} := r \in \left[\frac{R\cos\alpha}{\cos\theta}, R\right]$. Per simmetria $\boxed{x_G = 0}$.

Il segmento circolare è dato dalla differenza tra il settore circolare AOB ($\rightarrow$ [1]) e il triangolo $A\overset{\triangle}{O}B$ ($\rightarrow$ [2]).

$$m_1 = \rho R^2 \alpha$$

$$m_2 = \rho\,\frac{(2R\sin\alpha)\,(R\cos\alpha)}{2} = \rho R^2 \sin\alpha\cos\alpha$$

$$y_{G_1} = \frac{2R}{3}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$y_{G_2} = \frac{2}{3} R\cos\alpha.$$

Per la proprietà distributiva del baricentro, si ha:

$$y_G = \frac{m_1 y_{G_1} - m_2 y_{G_2}}{m} = \frac{m_1 y_{G_1} - m_2 y_{G_2}}{m_1 - m_2}$$

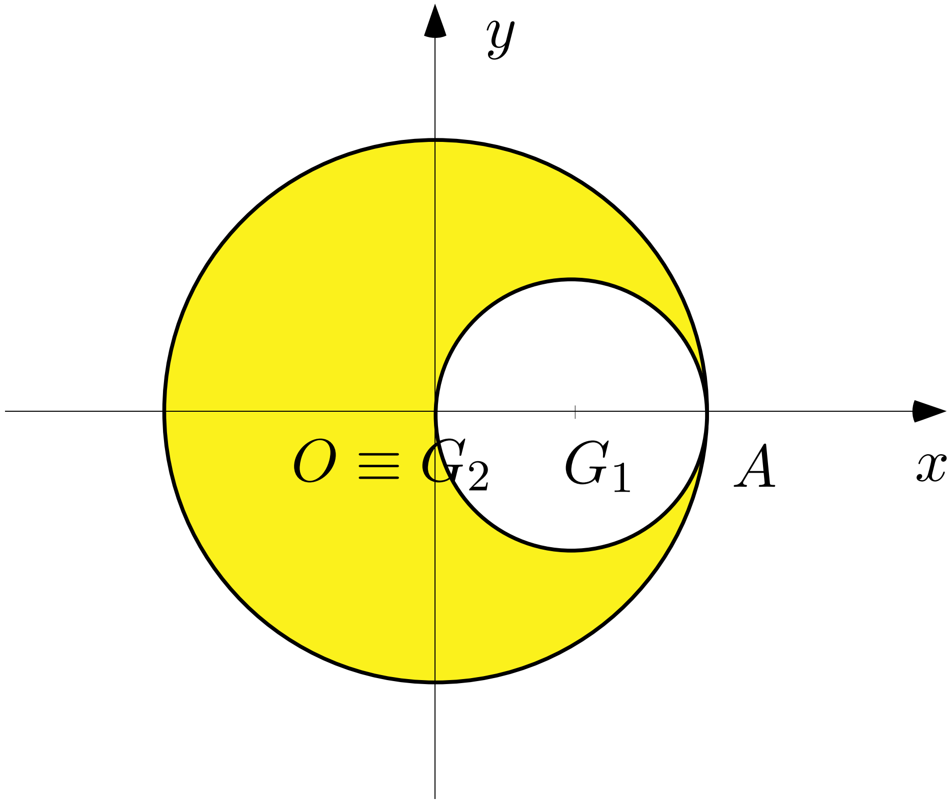
Pertanto:

$$\boxed{y_G} = \frac{2R \sin\alpha \left(1 - \cos^2\alpha\right)}{3\left(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\right)} \boxed{= \frac{2R\sin^3\alpha}{3\left(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\right)}}.$$

- Semidisco omogeneo $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$: $\boxed{x_G = 0,\ y_G = \frac{4R}{3\pi}}$.

Disco omogeneo con foro circolare

Determiniamo il baricentro di un disco omogeneo, di raggio R, con foro circolare, di raggio $\frac{R}{2}$.
Si introduca il riferimento cartesiano Oxy, come in figura.



Per simmetria $\boxed{y_G = 0}$.

$$x_{G_1} = \frac{R}{2}, \qquad x_{G_2} = 0$$
$$m_1 = \rho\,\frac{\pi R^2}{4}, \quad m_2 = \rho\pi R^2\,.$$

Per la proprietà distributiva del baricentro, si ha:

$$\boxed{x_G} = \frac{m_2\,x_{G_2} - m_1\,x_{G_1}}{m}\boxed{= -\frac{R}{6}}$$

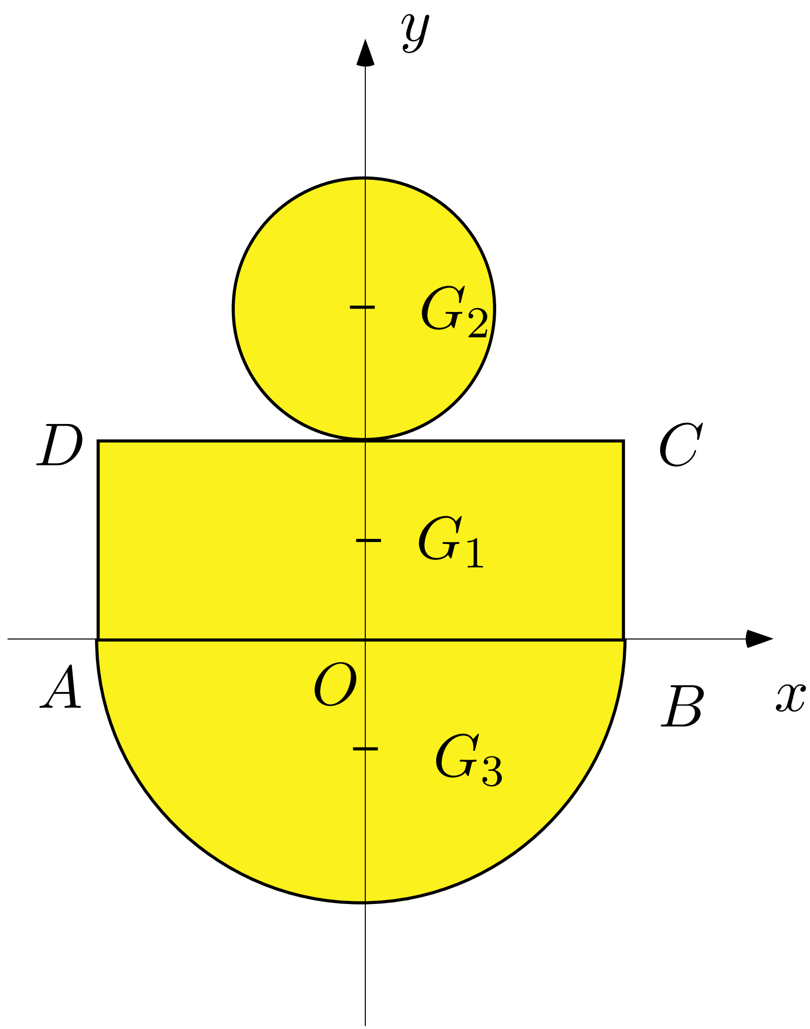
.

Lamina omogenea

Determiniamo il baricentro di una lamina omogenea, di massa m, costituita da

- un rettangolo di dimensioni $2a$ e $2b$, ($\longrightarrow$ [1]);
- un disco di raggio b, ($\longrightarrow$ [2]);
- un semidisco di raggio a, ($\longrightarrow$ [3]).

Si introduca il riferimento cartesiano Oxy, come in figura.



$$\overline{AB} = 2a \; , \qquad \overline{AD} = 2b$$

$$y_{G_1} = b \; , \qquad y_{G_2} = 3b \; , \qquad y_{G_3} = -\frac{4a}{3\pi}$$

$$m_1 = \rho 4ab \; , \quad m_2 = \rho b^2\pi \; , \quad m_3 = \rho \, \frac{a^2\pi}{2}$$

Per simmetria $\boxed{x_G = 0}$.

Per la proprietà distributiva del baricentro si ha

$$y_G = \frac{m_1 \, y_{G_1} + m_2 \, y_{G_2} + m_3 \, y_{G_3}}{m} .$$

Pertanto

$$\boxed{y_G = \frac{2\left(12ab^2 + 9\pi b^3 - 2a^3\right)}{3(8ab + 2\pi b^2 + \pi a^2)}}.$$