Esercitazioni di Meccanica Razionale

a.a. 2002/2003

Matrici d'inerzia

Maria Grazia Naso

naso@ing.unibs.it

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Brescia

Teorema di Huygens-Steiner

▶ Il momento d'inerzia I_α di un corpo rispetto ad un asse α è uguale al momento d'inerzia I_G rispetto ad un asse baricentrico α_G parallelo a α, più la massa m del corpo moltiplicata per la distanza al quadrato d^2 fra i due assi:

$$\boxed{I_\alpha = I_{\alpha_G} + m\, d^2}\,.$$

▶ La legge di variazione dei prodotti d'inerzia al variare del polo O è espressa da

$$\boxed{I_{hk}^O = {I_{hk}}^G - m\, x_h\, x_k\,, \quad h \neq k}\,,$$

essendo $\vec{x} = (G - O)$.

Asta omogenea

Consideriamo un'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza L.
La densità di massa $\rho = \dfrac{m}{L}$ è costante.

▶ Calcoliamo la matrice d'inerzia dell'asta AB *rispetto al riferimento cartesiano ortogonale* $Oxyz$ *indicato in Figura 1.*

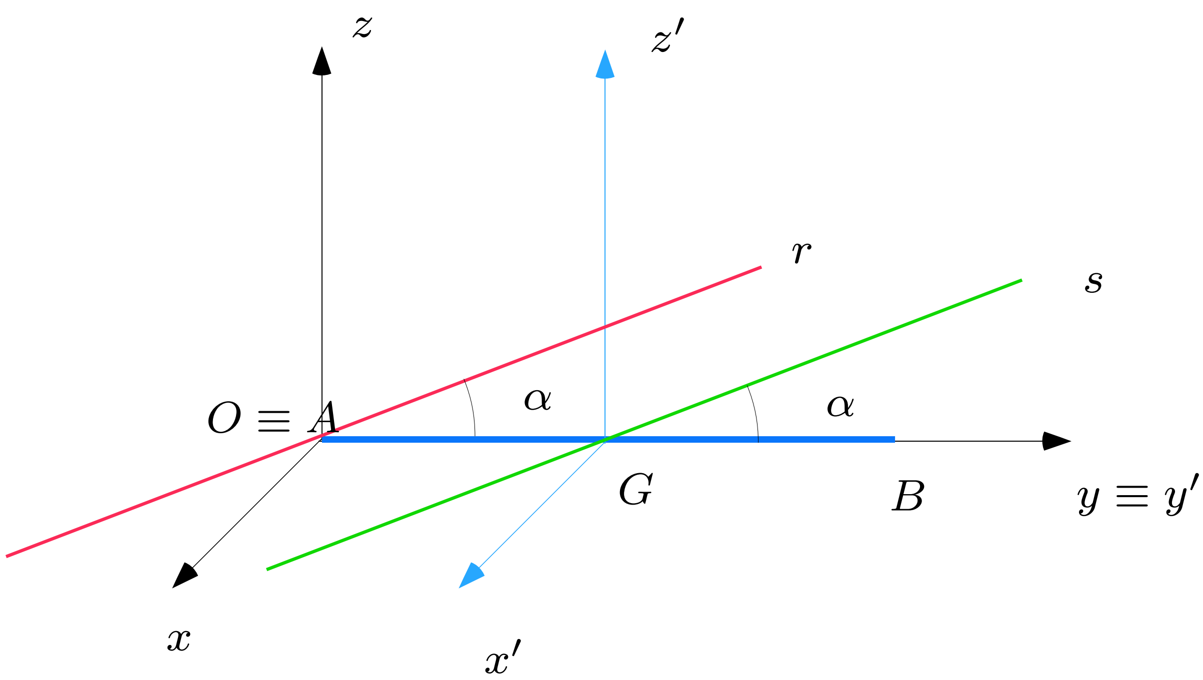

Figura 1: asta omogenea

Calcoliamo i *momenti d'inerzia* dell'asta AB rispetto agli assi Oy, Oz, Ox:

$$I_{22} = 0$$

$$I_{33} = I_{11} = \int_0^L \rho\, y^2\, dy = \frac{mL^2}{3}\,,$$

Inoltre $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$.

La matrice d'inerzia $\mathbf{I}_O$ dell'asta omogenea AB è

$$\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} = \frac{mL^2}{3}\,\mathrm{diag}\begin{bmatrix}1, & 0, & 1\end{bmatrix}.$$

▶ Sia $Gx'y'z'$ il riferimento cartesiano baricentrale ortogonale di Figura 1.

Per applicazione del Teorema di Huygens e della legge di variazione dei prodotti d'inerzia, la matrice d'inerzia *baricentrale* $\mathbf{I}_G$ dell'asta omogenea AB è

$$\mathbf{I}_G = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix} = \frac{mL^2}{12}\,\mathrm{diag}\left[1, \quad 0, \quad 1\right].$$

Esercizio 1. Determinare il momento d'inerzia dell'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza L, rispetto ad una retta r, passante per l'estremo A ed inclinata di un angolo α rispetto all'asta AB (Figura 1).

Risoluzione.

I metodo: Sia $\xi \in [0, L]$ la distanza del punto P corrente sull'asta dall'estremo A. La distanza dall'asse risulta $\xi \sin\alpha$. Quindi il momento d'inerzia richiesto è

$$\boxed{I_r =} \int_0^L \frac{m}{L}(\xi \sin\alpha)^2 \, d\xi = \boxed{\frac{mL^2}{3} \sin^2\alpha}.$$

II metodo: Nel riferimento $Oxyz$ considerato, supponendo che la retta r appartenga al piano Oyz, il versore $\vec{r}$ della retta r è $\vec{r} = \cos\alpha\, \vec{\jmath} + \sin\alpha\, \vec{k}$. Poiché $\boxed{I_r = \mathbf{I}_O \vec{r} \cdot \vec{r}}$, ed essendo

$$\mathbf{I}_O \vec{r} = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mL^2}{3} \sin\alpha \end{bmatrix}$$

si ha $\boxed{I_r = \dfrac{mL^2}{3} \sin^2\alpha}$. $\square$

Esercizio 2. Determinare il momento d'inerzia dell'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza L, rispetto ad una retta s, passante per il baricentro G dell'asta ed inclinata di un angolo α rispetto ad AB. (Figura 1).

$$\left[I_s = \tfrac{mL^2}{12}\,\sin^2\alpha\right]$$

Asta non omogenea

Consideriamo un'asta non omogenea AB, di lunghezza L e densità di massa $\rho(P) = k\,\overline{AP}$, $P \in AB$, $k > 0$, (densità lineare).

▶ Calcoliamo la matrice d'inerzia dell'asta AB *rispetto al riferimento cartesiano ortogonale* $Oxyz$ *di Figura 2.*

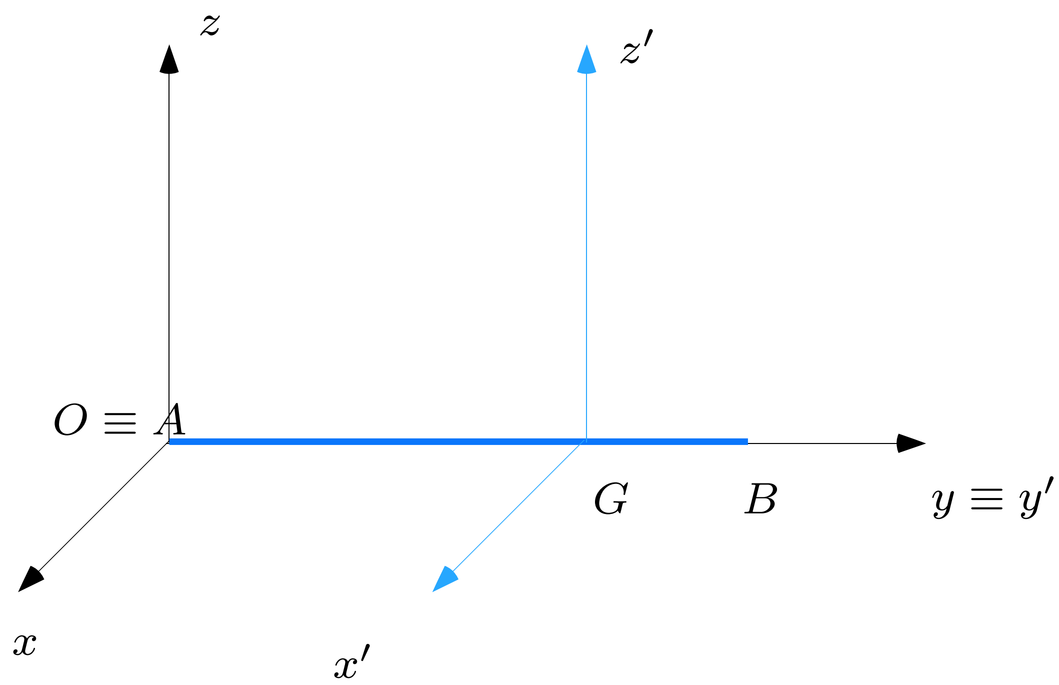

Figura 2: asta non omogenea

La massa m dell'asta AB è data da $m = \displaystyle\int_0^L k\, y\, dy = \frac{kL^2}{2}$.

Quindi $k = \frac{2m}{L^2}$.

Calcoliamo i *momenti d'inerzia* dell'asta AB rispetto agli assi Oy, Oz, Ox:

$$I_{22} = 0, \quad I_{33} = I_{11} = \int_0^L \underbrace{k\, y}_{=\rho(y)}\, y^2\, dy = \frac{mL^2}{2}.$$

Inoltre $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$.

La matrice d'inerzia $\mathbf{I}_O$ dell'asta non omogenea AB è

$$\mathbf{I}_O = \frac{mL^2}{2}\, \mathrm{diag}\left[1, \quad 0, \quad 1\right].$$

Esercizio 3. Determinare la matrice d'inerzia dell'asta AB, non omogenea, di lunghezza L e densità di massa $\rho(P) = k\,\overline{AP}$, $P \in AB$, $k > 0$, *rispetto al riferimento cartesiano baricentrale ortogonale $Gx'y'z'$ di Figura 2.*

Risoluzione. $I_{22}^G = 0$, $I_{12}^G = I_{13}^G = I_{23}^G = 0$. Calcoliamo I_{33}^G e I_{11}^G. Si osservi che $I_{33}^G = I_{11}^G$.

I metodo: Per applicazione della definizione di momento d'inerzia, si ha

$$I_{33}^G = I_{11}^G = \int_0^L k\,y\left(\frac{2}{3}L - y\right)^2 dy = \frac{mL^2}{18}\,.$$

II metodo: Per applicazione del Teorema di Huygens

$$I_{33}^{G} = I_{33}^{O} - m\, y_G^2 = \frac{mL^2}{18}\,.$$

La matrice d'inerzia baricentrale $\mathbf{I}_G$ dell'asta non omogenea AB risulta

$$\mathbf{I}_G = \frac{mL^2}{18}\,\mathrm{diag}\left[1, \quad 0, \quad 1\right]. \quad \square$$

Rettangolo omogeneo

Consideriamo una lamina rettangolare omogenea $OABC$, di massa m e lati $\overline{OA} = a$, $\overline{AB} = b$.

La densità di massa $\rho = \dfrac{m}{ab}$ è costante.

▶ Calcoliamo la matrice d'inerzia della lamina $OABC$ *rispetto al riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ di Figura 3.*

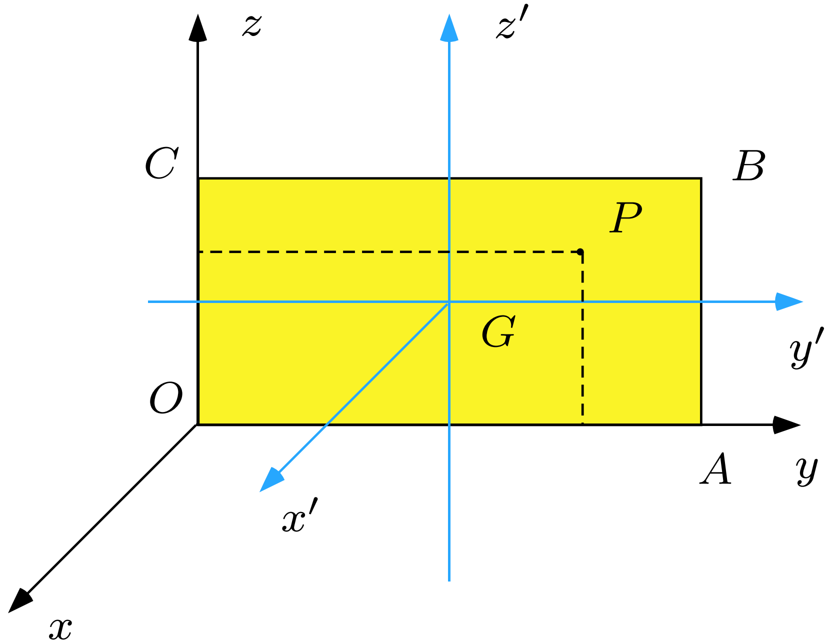

Figura 3: rettangolo omogeneo

Poiché il corpo rigido è piano, l'asse Ox, ortogonale al piano Oyz su cui giace la lamina $OABC$, è tale che $\boxed{I_{11} = I_{22} + I_{33}}$, con $I_{22} \neq I_{33}$, e $\boxed{I_{13} = I_{12} = 0}$.

Calcoliamo infatti i *momenti d'inerzia* della lamina $OABC$ rispetto agli assi Oy, Oz, Ox:

$$I_{22} = \int_0^a \int_0^b \rho\, z^2\, dz\, dy = \int_0^b \rho\, z^2\, a\, dz = \frac{mb^2}{3}$$

$$I_{33} = \int_0^a \int_0^b \rho\, y^2\, dz\, dy = \int_0^a \rho\, y^2\, b\, dy = \frac{ma^2}{3}$$

$$I_{11} = \int_0^a \int_0^b \rho\, (z^2 + y^2)\, dz\, dy = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{3} = I_{22} + I_{33}\,,$$

mentre i *prodotti d'inerzia* $-I_{12}$, $-I_{13}$, $-I_{23}$ della lamina $OABC$ sono determinati da

$$I_{12} = I_{13} = 0$$

$$I_{23} = -\int_0^a \int_0^b \rho\, y\, z\, dz\, dy = -\frac{m\,ab}{4}\,.$$

Risulta

$$\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} \frac{m\left(a^2+b^2\right)}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{3} & -\frac{m\,ab}{4} \\ 0 & -\frac{m\,ab}{4} & \frac{ma^2}{3} \end{bmatrix}.$$

N.B. L'asse Ox è principale d'inerzia.

Esercizio 4. Determinare la matrice d'inerzia della lamina rettangolare omogenea $OABC$, di massa m e lati $\overline{OA} = a$, $\overline{AB} = b$, *rispetto al riferimento cartesiano ortogonale baricentrale* $Gx'y'z'$ di Figura 3.

Risoluzione. Per applicazione del Teorema di Huygens, si trova

$$I_{22}^{G} = I_{22}^{O} - m\, z_G^2 = \frac{mb^2}{3} - \frac{mb^2}{4} = \frac{mb^2}{12}$$

$$I_{33}^{G} = I_{33}^{O} - m\, y_G^2 = \frac{ma^2}{3} - \frac{ma^2}{4} = \frac{ma^2}{12}$$

$$I_{11}^{G} = I_{22}^{G} + I_{33}^{G} = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{12}\,,$$

▶ *È possibile verificare che ogni asse normale ad un piano di simmetria materiale è principale d'inerzia.*

▶ I piani coordinati sono piani di simmetria materiale e quindi $I_{12}^G = I_{13}^G = I_{23}^G = 0$. Poiché ogni asse normale ad un piano di simmetria materiale è principale d'inerzia, il riferimento baricentrale $Gx'y'z'$ è principale d'inerzia.

La matrice d'inerzia $\mathbf{I}_G$ baricentrale della lamina $OABC$ è

$$\mathbf{I}_G = \begin{bmatrix} \frac{m\left(a^2+b^2\right)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{12} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\left[\frac{m\left(a^2+b^2\right)}{12}, \quad \frac{mb^2}{12}, \quad \frac{ma^2}{12}\right]. \quad \square$$

▶ Se la lamina *omogenea* $OABC$ è quadrata ($a = b = L$), si ha $\mathbf{I}_G = \frac{mL^2}{12} \operatorname{diag}\left[2, \quad 1, \quad 1\right]$.

Anello omogeneo

Consideriamo un anello omogeneo, di massa m e raggio R.
La densità di massa $\rho = \dfrac{m}{2\pi R}$ è costante.
▶ Calcoliamo la matrice d'inerzia dell'anello *rispetto al riferimento cartesiano ortogonale baricentrale* $Oxyz$ *indicato in Figura 4.*

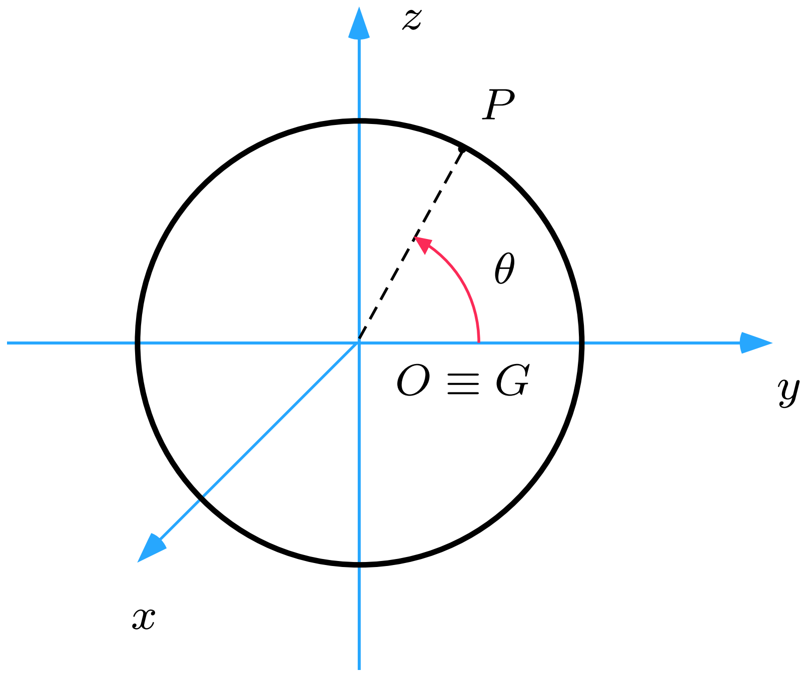

Figura 4: anello omogeneo

Sia P un punto dell'anello. Poniamo $y^+\widehat{O}P := \theta \in [0, 2\pi]$. Si trova

$$I_{11} = \int_0^{2\pi} \rho\, R^2\, R\, d\theta = mR^2\,.$$

Poiché il corpo rigido è piano, l'asse Ox, ortogonale al piano Oyz su cui giace l'anello, è principale d'inerzia e $\boxed{I_{11} = I_{22} + I_{33}}$, e per simmetria $I_{22} = I_{33}$. Pertanto $I_{22} = I_{33} = \dfrac{mR^2}{2}$.

► I piani coordinati sono piani di simmetria materiale e quindi $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$. Poiché ogni asse normale ad un piano di simmetria materiale è principale d'inerzia, il riferimento baricentrale $Oxyz$ è principale d'inerzia.

La matrice d'inerzia baricentrale $\mathbf{I}_G$ dell'anello è

$$\mathbf{I}_G = \begin{bmatrix} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix} = mR^2 \operatorname{diag}\left[1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right] .$$

Arco di circonferenza omogeneo

Consideriamo un arco di circonferenza $\widehat{AB}$, di massa m, raggio R e apertura $A\widehat{O}B = \alpha$. La densità di massa $\rho = \dfrac{m}{\alpha R}$ è costante.

▶ Calcoliamo la matrice d'inerzia dell'arco $\widehat{AB}$ *rispetto al riferimento cartesiano ortogonale* $Oxyz$ *di Figura 5.*

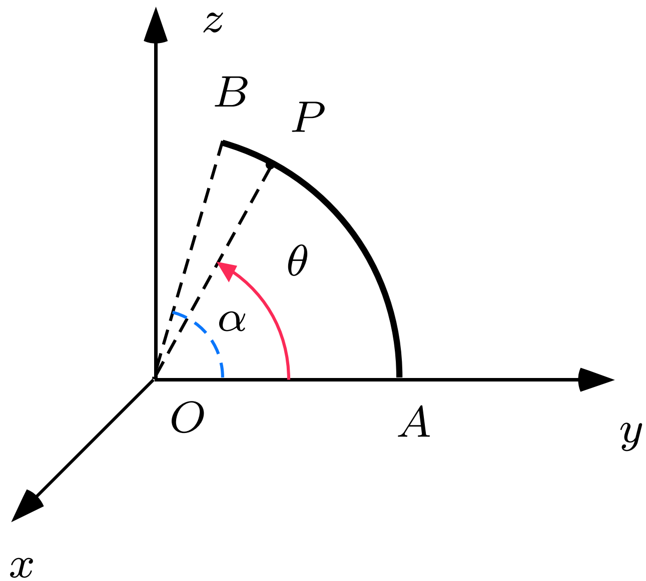

Figura 5: arco di circonferenza omogeneo

Sia P un punto dell'arco. Poniamo $A\widehat{O}P := \theta \in [0, \alpha]$. Si trova

$$I_{11} = \int_0^\alpha \rho\, R^2\, R\, d\theta = mR^2\,.$$

N.B. I_{11} è indipendente da α.

$$\begin{aligned} I_{33} &= \int_0^\alpha \rho\, R^2\, \cos^2\theta\, R\, d\theta \\ &= \frac{mR^2}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = mR^2\, \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{4\alpha}\,. \end{aligned}$$

Poiché il corpo rigido è piano, l'asse Ox, ortogonale al piano Oyz su cui giace l'arco di circonferenza, è principale d'inerzia e $\boxed{I_{11} = I_{22} + I_{33}}$, con $I_{22} \neq I_{33}$. Risulta quindi

$$I_{22} = I_{11} - I_{33} = mR^2\, \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4\alpha}\,.$$

▶ Inoltre $I_{12} = I_{13} = 0$ e

$$I_{23} = -\int_0^{\alpha} \rho\, R^2\, \sin\theta\, \cos\theta\, R\, d\theta = -\frac{mR^2}{2}\, \frac{\sin^2\alpha}{\alpha}\,.$$

La matrice d'inerzia $\mathbf{I}_O$ dell'arco di circonferenza è

$$\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & mR^2\,\dfrac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4\alpha} & -\dfrac{mR^2}{2}\,\dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha} \\ 0 & -\dfrac{mR^2}{2}\,\dfrac{\sin^2\alpha}{\alpha} & mR^2\,\dfrac{2\alpha + \sin 2\alpha}{4\alpha} \end{bmatrix}.$$

▶ Se $\alpha = 2\pi$ allora ritroviamo gli stessi risultati trovati per l'anello omogeneo.

Disco omogeneo

Consideriamo un disco omogeneo, di massa m, raggio R.
La densità di massa $\rho = \dfrac{m}{\pi\, R^2}$ è costante.

▶ Calcoliamo la matrice d'inerzia del disco *rispetto al riferimento cartesiano ortogonale baricentrale* $Oxyz$ *di Figura 6.*

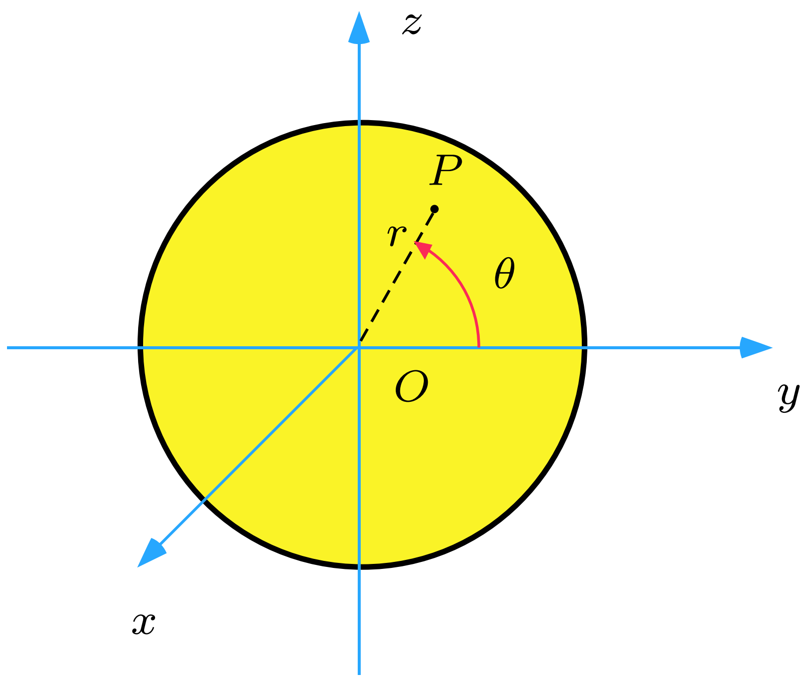

Figura 6: disco omogeneo

Sia P un punto del disco. Poniamo $y^+\widehat{O}P := \theta \in [0, 2\pi]$ e $|P - O| := r \in [0, R]$. Si trova

$$I_{11} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho\, r^2\, r\, dr\, d\theta = \int_0^R \rho\, r^2\, 2\pi\, r\, dr = \frac{mR^2}{2}\,.$$

Poiché il corpo rigido è piano, l'asse Ox, ortogonale al piano Oyz su cui giace il disco, è principale d'inerzia e $\boxed{I_{11} = I_{22} + I_{33}}$, con $I_{22} = I_{33}$. Risulta quindi $I_{22} = I_{33} = \frac{1}{2} I_{11} = \frac{mR^2}{4}$.

▶ I piani coordinati sono piani di simmetria materiale e quindi $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$.

La matrice d'inerzia baricentrale $\mathbf{I}_O$ del disco è

$$\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix} = \frac{mR^2}{4} \operatorname{diag}\begin{bmatrix} 2, & 1, & 1 \end{bmatrix}.$$

Settore circolare omogeneo

Consideriamo un settore circolare omogeneo AOB, di massa m, raggio R ed apertura $A\widehat{O}B = \alpha$.

La densità di massa $\rho = \dfrac{2m}{\alpha\, R^2}$ è costante.

▶ Calcoliamo la matrice d'inerzia del settore circolare omogeneo *rispetto al riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ di Figura 7.*

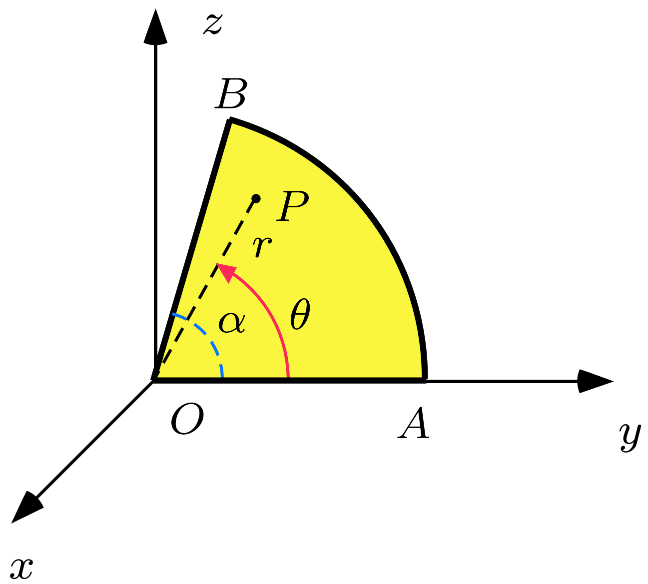

Figura 7: settore circolare omogeneo

Sia P un punto del settore circolare omogeneo. Poniamo $y^+\widehat{O}P := \theta \in [0, \alpha]$ e $|P - O| := r \in [0, R]$. Si trova

$$I_{11} = \int_0^\alpha \int_0^R \rho\, r^2\, r\, dr\, d\theta = \int_0^R \rho\, r^2\, r\, \alpha\, dr = \frac{mR^2}{2}\,.$$

N.B. I_{11} è indipendente da α.

Poiché il corpo rigido è piano, l'asse Ox, ortogonale al piano Oyz su cui giace il settore circolare, è principale d'inerzia e

$\boxed{I_{11} = I_{22} + I_{33}}$, con $I_{22} \neq I_{33}$. Si ha

$$I_{33} = \int_0^\alpha \int_0^R \rho\, r^2\, \cos^2\theta\, r\, dr\, d\theta = \frac{mR^2}{8}\,\frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha}$$

$$I_{22} = I_{11} - I_{33} = \frac{mR^2}{8}\,\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\alpha}\,.$$

▶ Il piano coordinato Oyz è un piano di simmetria materiale e quindi $I_{12} = I_{13} = 0$. Inoltre

$$I_{23} = -\int_0^\alpha \int_0^R \rho\, r^2 \, \sin\theta \, \cos\theta \, r \, dr \, d\theta = -\frac{mR^2}{4} \, \frac{\sin^2\alpha}{\alpha} \, .$$

La matrice d'inerzia $\mathbf{I}_O$ del settore circolare omogeneo è

$$\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{8} \, \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\alpha} & -\frac{mR^2}{4} \, \frac{\sin^2\alpha}{\alpha} \\ 0 & -\frac{mR^2}{4} \, \frac{\sin^2\alpha}{\alpha} & \frac{mR^2}{8} \, \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\alpha} \end{bmatrix} .$$

Consideriamo un triangolo isoscele omogeneo $A\overset{\triangle}{O}B$, di massa m, base $\overline{AB} = a$ ed altezza $\overline{OH} = h$. La densità di massa $\rho = \dfrac{2m}{a\,h}$ è costante.

▶ Calcoliamo la matrice d'inerzia del triangolo isoscele omogeneo *rispetto al riferimento cartesiano ortogonale* $Oxyz$ *di Figura 8.*

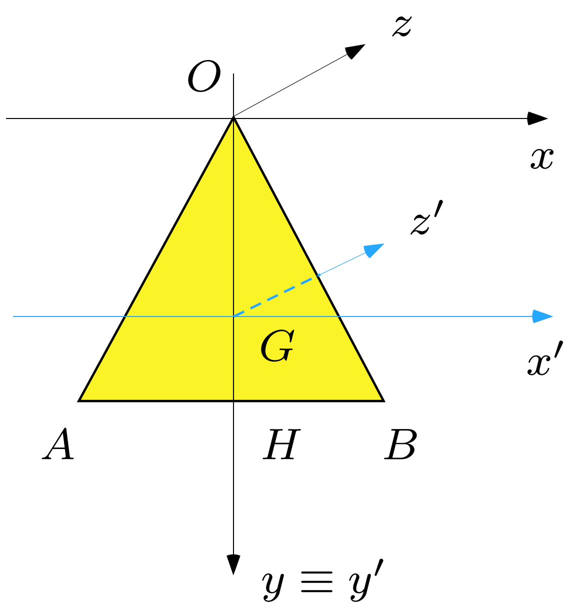

Figura 8: triangolo isoscele omogeneo

In $Oxyz$: $A\left(-\frac{a}{2}, h, 0\right)$, $B\left(\frac{a}{2}, h, 0\right)$,

$$r_1 : y = -\frac{2h}{a}\,x\,, \quad \text{e} \quad r_2 : y = \frac{2h}{a}\,x\,.$$

Si trova

$$I_{11} = \frac{2m}{a\,h}\int_0^h \int_{-\frac{a}{2h}y}^{\frac{a}{2h}y} y^2\,dx\,dy = \frac{2m}{a\,h}\int_0^h \frac{a}{h}\,y^3\,dy = \frac{mh^2}{2}$$

$$I_{22} = \frac{2m}{a\,h}\int_0^h \int_{-\frac{a}{2h}y}^{\frac{a}{2h}y} x^2\,dx\,dy = \frac{2m}{a\,h}\int_0^h \frac{1}{3}\,\frac{a^3}{4h^3}\,y^3\,dy = \frac{ma^2}{24}$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{mh^2}{2} + \frac{ma^2}{24}\,.$$

Poiché il corpo rigido è piano, l'asse Oz, ortogonale al piano Oxy su cui giace la lamina triangolare, è principale d'inerzia e $I_{13} = I_{23} = 0$. Inoltre

$$I_{12} = -\frac{2m}{a\,h} \int_0^h \int_{-\frac{a}{2h}y}^{\frac{a}{2h}y} x\,y\,dx\,dy = 0\,.$$

Quindi il riferimento $Oxyz$ è principale d'inerzia e si ha

$$\mathbf{I}_O = \mathrm{diag}\left[\frac{mh^2}{2}, \quad \frac{ma^2}{24}, \quad \frac{ma^2}{24} + \frac{mh^2}{2}\right]\,.$$

Esercizio 5. Calcolare il momento d'inerzia della lamina omogenea, a forma di triangolo isoscele $A\overset{\triangle}{O}B$, di massa m, base $\overline{AB} = a$ ed altezza $\overline{OH} = h$, rispetto all'asse AB (Figura 8).

$$\left[I_{AB} = \frac{mh^2}{6} \right]$$

Esercizio 6. Calcolare la matrice d'inerzia della lamina omogenea, a forma di triangolo isoscele $A\overset{\triangle}{O}B$, di massa m, base $\overline{AB} = a$ ed altezza $\overline{OH} = h$, rispetto al sistema baricentrale $Gx'y'z'$ (Figura 8).

$$\left[\mathbf{I}_G = \mathrm{diag}\left[\frac{mh^2}{18}, \quad \frac{ma^2}{24}, \quad \frac{ma^2}{24} + \frac{mh^2}{18} \right] \right]$$

Esercizio 7. Determinare le grandezze richieste negli Esercizi 5-6, nel caso in cui la lamina omogenea $A\overset{\triangle}{O}B$, di massa m e lato $\overline{AB} = L$, sia a forma di triangolo equilatero.

$$\left[I_{AB} = \frac{mL^2}{8}\,;\ \mathbf{I}_G = \mathrm{diag}\left[\frac{mL^2}{24}, \quad \frac{mL^2}{24}, \quad \frac{mL^2}{12} \right] \right]$$

Esercizio 8. Consideriamo un triangolo rettangolo $A\overset{\triangle}{O}B$, di massa m, cateti $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$. Introdotti il riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ ed il riferimento cartesiano baricentrale ortogonale $Gx'y'z'$ (Figura 9), si calcolino

(a) la matrice d'inerzia baricentrale $\mathbf{I}_G$;

(b) la matrice d'inerzia $\mathbf{I}_O$.

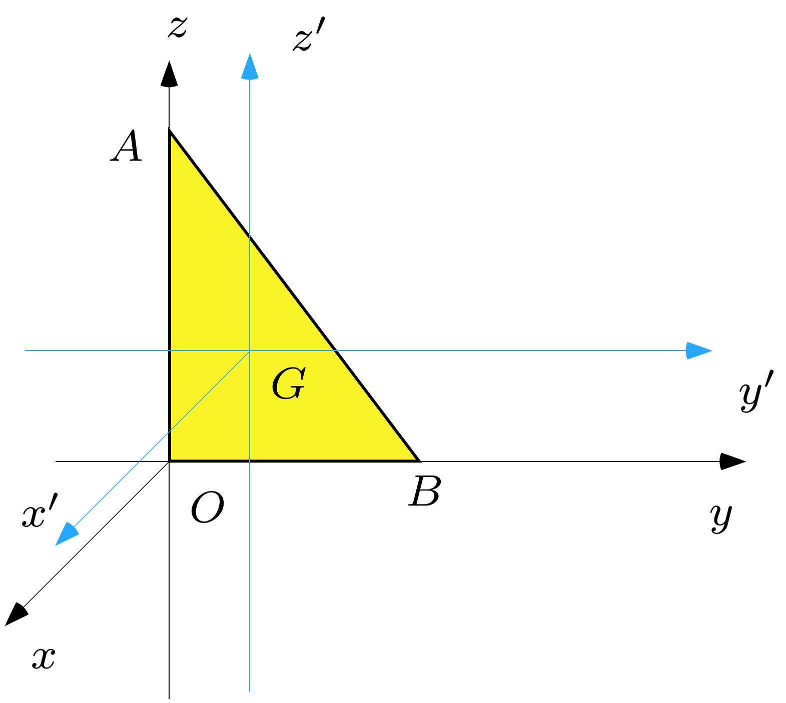

Figura 9: triangolo rettangolo omogeneo

Risoluzione. (a) Il baricentro G, intersezione delle tre mediane del triangolo $A\overset{\triangle}{O}B$, divide ogni mediana in due parti, una doppia dell'altra. Nel riferimento baricentrale $Gx'y'z'$ (Figura 9), $A\left(0, -\frac{1}{3}\,b, \frac{2}{3}\,a\right)$, $B\left(0, \frac{2}{3}\,b, -\frac{1}{3}\,a\right)$, e la retta AB ha equazione $x' = 0$, $y' = \frac{b}{3} - \frac{b}{a}\,z'$. Quindi

$$I_{22}^G = \int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \int_{-\frac{b}{3}}^{\frac{b}{3} - \frac{b}{a}\,z'} \frac{2m}{ab}\, z'^2\, dy'\, dz' = \frac{ma^2}{18}\,.$$

Analogamente $I_{33}^G = \frac{mb^2}{18}$. Essendo la lamina triangolare piana, si ha $I_{11}^G = I_{22}^G + I_{33}^G$. Inoltre

$$I_{23}^G = -\int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \int_{-\frac{b}{3}}^{\frac{b}{3} - \frac{b}{a}\,z'} \frac{2m}{ab}\, y'\, z'\, dy'\, dz' = \frac{mab}{36}\,.$$

Quindi

$$\mathbf{I}_G = \begin{bmatrix} \frac{m(a^2+b^2)}{18} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{18} & \frac{mab}{36} \\ 0 & \frac{mab}{36} & \frac{mb^2}{18} \end{bmatrix},$$

ed il riferimento $Gx'y'z'$ non è inerziale.

(b) Nel riferimento $Oxyz$, si ha $(G-O) = \frac{b}{3}\,\vec{\jmath} + \frac{a}{3}\,\vec{k}$. Risulta

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_G + m \begin{bmatrix} \frac{a^2+b^2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{9} & -\frac{ab}{9} \\ 0 & -\frac{ab}{9} & \frac{b^2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m(a^2+b^2)}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{6} & -\frac{mab}{12} \\ 0 & -\frac{mab}{12} & \frac{mb^2}{6} \end{bmatrix}. \quad \square$$

Esercizio 9. Determinare le matrici d'inerzia, come richieste nell'Esercizio 8, nel caso di una lamina omogenea $A\overset{\triangle}{O}B$, di massa m, a forma di triangolo rettangolo isoscele (cateti $\overline{OA} = \overline{OB} = L$).

$$\left[\mathbf{I}_G = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{18} & \frac{mL^2}{36} \\ 0 & \frac{mL^2}{36} & \frac{mL^2}{18} \end{bmatrix} ; \mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{6} & -\frac{mL^2}{12} \\ 0 & -\frac{mL^2}{12} & \frac{mL^2}{6} \end{bmatrix} \right]$$

Esercizio 10. Si consideri la lamina quadrata omogenea $ABCD$, di massa m, (Figura 10), con foro quadrato $EFHI$ ($\overline{EF} = l$, $\overline{AB} = L$, $l < L$). Si chiede di calcolare

(a) la matrice d'inerzia $\mathbf{I}_O$ della lamina rispetto agli assi del riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ (Figura 10).

(b) il momento d'inerzia I_r della lamina rispetto all'asse r passante per i punti A e B.

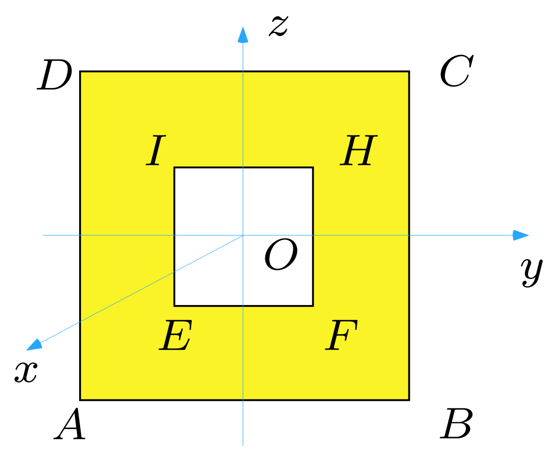

Figura 10: lamina omogenea

Risoluzione.

(a) Poiché il corpo rigido è piano, l'asse Ox, ortogonale al piano Oyz su cui giace la lamina, è principale d'inerzia e $\boxed{I_{11} = I_{22} + I_{33}}$, con $I_{22} = I_{33} = \frac{1}{2}\, I_{11}$.

I piani coordinati sono piani di simmetria materiale e quindi $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$.

Il riferimento $Oxyz$ è *baricentrale e principale d'inerzia*.

▶ La densità di massa (costante) è data da $\rho = \frac{m}{L^2 - l^2}$.

Siano $m_1 = \rho\, \overline{EF}^2 = \frac{ml^2}{L^2 - l^2}$ e $m_2 = \rho\, \overline{AB}^2 = \frac{mL^2}{L^2 - l^2}$.

▶ I momenti d'inerzia della lamina quadrata $ABCD$ (N.B. senza il foro), di massa m_2 e lato L, rispetto agli assi Oy, Oz e Ox sono

$$I_{22}^{\blacksquare} = \frac{m_2 L^2}{12} = \frac{mL^4}{12(L^2 - l^2)} \qquad\qquad I_{33}^{\blacksquare} = I_{22}^{\blacksquare}$$

$$I_{11}^{\blacksquare} = 2\, I_{22}^{\blacksquare} = \frac{mL^4}{6(L^2 - l^2)} \, .$$

▶ I momenti d'inerzia del quadrato $EFHI$ (N.B. il materiale rimosso), di massa m_1 e lato l, rispetto agli assi Oy, Oz e Ox sono

$$I_{22}^{\square} = \frac{m_1 l^2}{12} = \frac{ml^4}{12(L^2 - l^2)} \qquad\qquad I_{33}^{\square} = I_{22}^{\square}$$

$$I_{11}^{\square} = 2\, I_{22}^{\square} = \frac{ml^4}{6(L^2 - l^2)} \, .$$

Quindi i momenti d'inerzia della lamina quadrata $ABCD$ forata, rispetto agli assi Oy, Oz e Ox sono rispettivamente

$$I_{22} = I_{22}^{\blacksquare} - I_{22}^{\square} = \frac{m(L^2 + l^2)}{12} \qquad I_{33} = I_{22}$$

$$I_{11} = I_{11}^{\blacksquare} - I_{11}^{\square} = \frac{m(L^2 + l^2)}{6} \,.$$

La matrice d'inerzia richiesta è $\mathbf{I}_O = \dfrac{m(L^2 + l^2)}{12} \operatorname{diag}\left[2, \quad 1, \quad 1\right]$.

(b) Per applicazione del Teorema di Huygens si ha

$$I_r = I_{22} + m\,\frac{L^2}{4} = \frac{m(4L^2 + l^2)}{12} \,. \qquad \square$$

Esercizio 11. Si consideri la lamina quadrata omogenea $ABCD$ (Figura 11), con foro quadrato $EFHI$ (massa m, $\overline{EF} = l$, $\overline{AB} = L$, $l < L$). Si chiede di calcolare la matrice d'inerzia $\mathbf{I}_O$ della lamina rispetto agli assi del riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ (Figura 11).

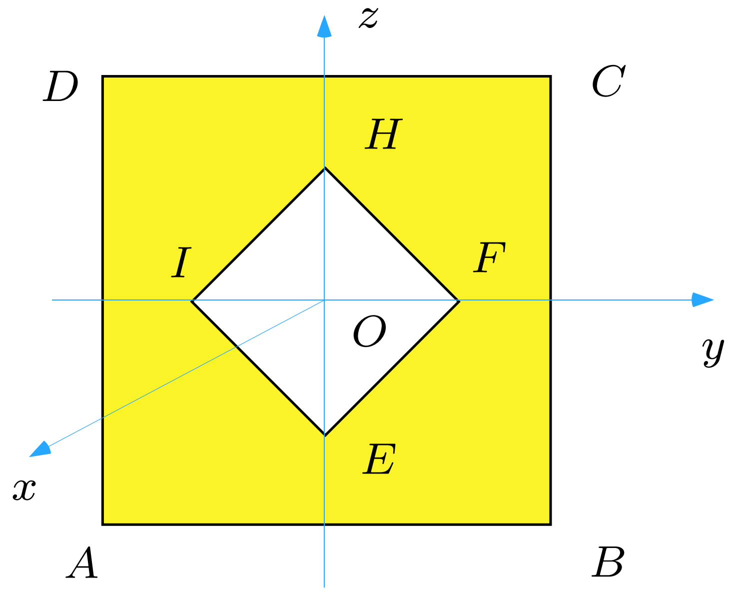

Figura 11: lamina omogenea

Risoluzione.

Poiché il corpo rigido è piano, l'asse Ox, ortogonale al piano Oyz su cui giace la lamina, è principale d'inerzia e $\boxed{I_{11} = I_{22} + I_{33}}$, con $I_{22} = I_{33} = \frac{1}{2}\, I_{11}$.

I piani coordinati sono piani di simmetria materiale e quindi $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$.

Il riferimento $Oxyz$ è *baricentrale e principale d'inerzia*.

La densità di massa (costante) è data da $\rho = \frac{m}{L^2 - l^2}$.

Siano $m_1 = \rho\, \overline{EF}^2 = \frac{ml^2}{L^2 - l^2}$ e $m_2 = \rho\, \overline{AB}^2 = \frac{mL^2}{L^2 - l^2}$.

▶ I momenti d'inerzia della lamina quadrata $ABCD$ (N.B. senza il foro), di massa m_2 e lato L, rispetto agli assi Oy, Oz e Ox sono rispettivamente

$$I^{\blacksquare}_{22} = \frac{m_2 L^2}{12} = \frac{m L^4}{12(L^2 - l^2)} \qquad\qquad I^{\blacksquare}_{33} = I^{\blacksquare}_{22}$$

$$I^{\blacksquare}_{11} = 2\, I^{\blacksquare}_{22} = \frac{m L^4}{6(L^2 - l^2)}\,.$$

▶ I momenti d'inerzia del quadrato $EFHI$ (N.B. il materiale rimosso), di massa m_1 e lato l, rispetto agli assi Oy, Oz e Ox sono rispettivamente

$$I_{22}^{\diamond} = 2\left(\frac{m_{\overset{\triangle}{HIF}}\overline{OH}^2}{6}\right) = \frac{m_1 l^2}{12} = \frac{ml^4}{12(L^2 - l^2)} \qquad I_{33}^{\diamond} = I_{22}^{\diamond}$$

$$I_{11}^{\diamond} = 2\, I_{22}^{\diamond} = \frac{ml^4}{6(L^2 - l^2)}\,.$$

▶ Quindi i momenti d'inerzia della lamina quadrata $ABCD$ forata, rispetto agli assi Oy, Oz e Ox sono rispettivamente

$$I_{22} = I_{22}^{\blacksquare} - I_{22}^{\diamond} = \frac{m(L^2 + l^2)}{12} \qquad\qquad I_{33} = I_{22}$$

$$I_{11} = I_{11}^{\blacksquare} - I_{11}^{\diamond} = \frac{m(L^2 + l^2)}{6}\,.$$

La matrice d'inerzia richiesta è

$$\mathbf{I}_O = \frac{m(L^2 + l^2)}{12}\, \mathrm{diag}\left[2, \quad 1, \quad 1\right].$$

N.B. Nel caso in cui il foro sia ruotato di 45° (Figura 11) rispetto a quello della lamina di Figura 10, otteniamo la stessa matrice d'inerzia $\mathbf{I}_O$. □

Esercizio 12. Si consideri la lamina quadrata omogenea $ABCD$ (Figura 12), di massa m e lato $\overline{AB} = L$, con foro circolare, di centro O e raggio $R \leq L$. Si chiede di calcolare la matrice d'inerzia $\mathbf{I}_O$ della lamina rispetto agli assi del riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ (Figura 12).

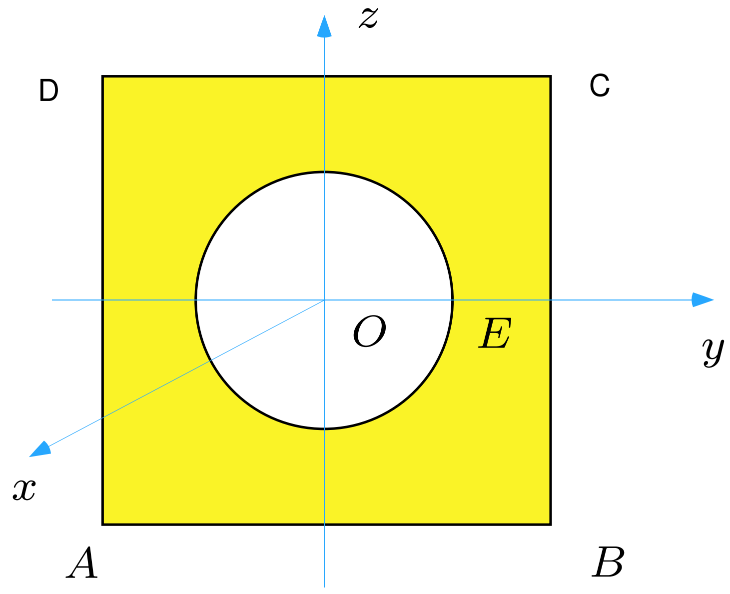

Figura 12: lamina omogenea

Risoluzione.

Poiché il corpo rigido è piano, l'asse Ox, ortogonale al piano Oyz su cui giace la lamina, è principale d'inerzia e $\boxed{I_{11} = I_{22} + I_{33}}$, con $I_{22} = I_{33} = \frac{1}{2}\, I_{11}$.

I piani coordinati sono piani di simmetria materiale e quindi $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$.

Il riferimento $Oxyz$ è *baricentrale e principale d'inerzia*.

La densità di massa (costante) è data da $\rho = \frac{m}{L^2 - \pi R^2}$.

Siano $m_1 = \rho\, \pi R^2 = \frac{m\, \pi R^2}{L^2 - \pi R^2}$ e $m_2 = \rho\, \overline{AB}^2 = \frac{m L^2}{L^2 - \pi R^2}$.

▶ I momenti d'inerzia della lamina quadrata $ABCD$ (N.B. senza il foro), di massa m_2 e lato L, rispetto agli assi Oy, Oz e Ox sono rispettivamente

$$I_{22} = \frac{m_2 L^2}{12} = \frac{m L^4}{12(L^2 - \pi R^2)} \qquad I_{33} = I_{22}$$

$$I_{11} = 2\, I_{22} = \frac{m L^4}{6(L^2 - \pi R^2)}\,.$$

▶ I momenti d'inerzia del disco (N.B. il materiale rimosso), di massa m_1, di centro O e raggio R, rispetto agli assi Oy, Oz e Ox sono rispettivamente

$$I_{22}^{\circ} = \frac{m_1 R^2}{4} = \frac{m\,\pi R^4}{4(L^2 - \pi R^2)} \qquad I_{33}^{\circ} = I_{22}^{\circ}$$

$$I_{11}^{\circ} = 2\,I_{22}^{\circ} = \frac{m\,\pi R^4}{2(L^2 - \pi R^2)}\,.$$

▶ Quindi i momenti d'inerzia della lamina quadrata $ABCD$ forata, rispetto agli assi Oy, Oz e Ox sono rispettivamente

$$I_{22} = I^{\blacksquare}_{22} - I^{\circ}_{22} = \frac{m}{12(L^2 - \pi R^2)} \left(L^4 - 3\pi R^4\right) \qquad I_{33} = I_{22}$$

$$I_{11} = I^{\blacksquare}_{11} - I^{\circ}_{11} = \frac{m}{6(L^2 - \pi R^2)} \left(L^4 - 3\pi R^4\right) \, .$$

La matrice d'inerzia richiesta è

$$\mathbf{I}_O = \frac{m}{12(L^2 - \pi R^2)} \left(L^4 - 3\pi R^4\right) \operatorname{diag}\begin{bmatrix} 2, & 1, & 1 \end{bmatrix} . \quad \square$$

Esercizio 13. Si consideri la lamina quadrata omogenea $OABC$ (Figura 13), di massa m e lato $\overline{AB} = L$, con foro a settore circolare, di centro O e raggio L. Si chiede di calcolare il baricentro G e la matrice d'inerzia $\mathbf{I}_O$ della lamina rispetto agli assi del riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ (Figura 12).

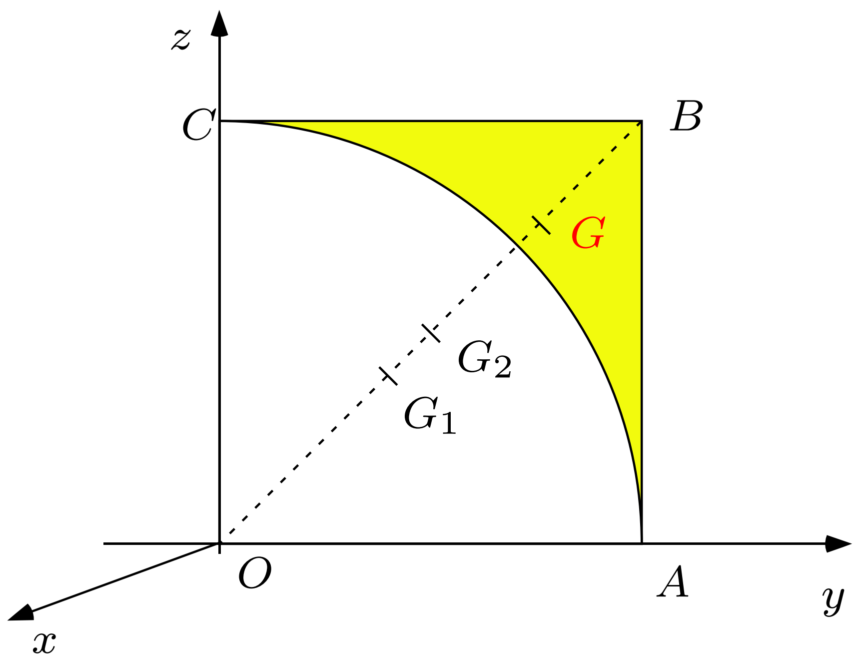

Figura 13: lamina omogenea

Risoluzione.

Siano G_1 e G_2 i baricentri, rispettivamente, del settore circolare AOC e del quadrato $OABC$.

Nel riferimento $Oxyz$, il baricentro G_2 del quadrato $OABC$ ha coordinate $G_2\left(0, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right)$. Essendo poi $\overline{OG_1} = \frac{2}{3}\,L\,\frac{4}{\pi}\,\sin\frac{\pi}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\,L$, si ha $G_1\left(0, \frac{4L}{3\pi}, \frac{4L}{3\pi}\right)$. Il baricentro G appartiene al piano Oyz su cui giace la lamina, quindi $x_G = 0$. Per simmetria $z_G = y_G$.

La densità di massa (costante) è data da $\rho = \frac{4m}{L^2(4-\pi)}$.

Siano $m_1 = \rho\,\frac{\pi L^2}{4} = \frac{\pi\,m}{4-\pi}$ e $m_2 = \rho\,\overline{AB}^2 = \frac{4m}{4-\pi}$.

Per applicazione della proprietà distributiva dei baricentri, si trova

$$y_G = \frac{m_2\, y_{G_2} - m_1\, y_{G_1}}{m} = \frac{2L}{3(4-\pi)}\,.$$

Pertanto $G\left(0, \frac{2L}{3(4-\pi)}, \frac{2L}{3(4-\pi)}\right)$.

Poiché il corpo rigido è piano, l'asse Ox, ortogonale al piano Oyz su cui giace la lamina, è principale d'inerzia e $\boxed{I_{11} = I_{22} + I_{33}}$, con $I_{22} = I_{33} = \frac{1}{2}\, I_{11}$. Inoltre $I_{12} = I_{13} = 0$.

▶ I momenti d'inerzia della lamina quadrata $OABC$ (N.B. senza il foro), di massa m_2 e lato L, rispetto agli assi Oy, Oz e Ox sono rispettivamente

$$I_{11}^{\blacksquare} = \frac{2}{3}\, m_2 L^2 = \frac{8mL^2}{3(4-\pi)}$$

$$I_{33}^{\blacksquare} = I_{22}^{\blacksquare} = \frac{1}{2} I_{11}^{\blacksquare} = \frac{4mL^2}{3(4-\pi)}$$

$$I_{23}^{\blacksquare} = -\frac{m_2 L^2}{4} = -\frac{mL^2}{4-\pi}\,.$$

► I momenti d'inerzia del settore circolare (N.B. il materiale rimosso), di massa m_1, di centro O e raggio R, rispetto agli assi Oy, Oz e Ox sono rispettivamente

$$I_{11}^{\triangleleft} = \frac{m_1 L^2}{2} = \frac{m\,\pi L^2}{2(4-\pi)}$$

$$I_{33}^{\triangleleft} = I_{22}^{\triangleleft} = \frac{m_1 L^2}{4} = \frac{m\,\pi L^2}{4(4-\pi)}$$

$$I_{23}^{\triangleleft} = -\frac{m\,L^2}{2(4-\pi)}\,.$$

N.B. $I_{33}^{\triangleleft}$ può essere calcolato anche come

$$I_{33}^{\triangleleft} = \frac{1}{4} I_{33}^{\circ} = \frac{1}{4}\,\frac{m_{\circ}\,L^2}{4} = \rho\,\frac{\pi\,L^4}{16} = \frac{m\,\pi L^2}{4(4-\pi)}.$$

La matrice d'inerzia richiesta è

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_O^{\blacksquare} - \mathbf{I}_O^{\triangleleft} = \frac{mL^2}{4-\pi}\begin{bmatrix} \frac{16-3\pi}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16-3\pi}{12} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{16-3\pi}{12} \end{bmatrix}. \qquad \square$$